

Exponenciální funkce a rovnice (4)

1. Pravidla pro mocniny

1) $a^0 = 1$	4) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	7) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	$10^{\frac{m}{n}} \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
2) $a^1 = a$	5) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	8) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	
3) $a^{-1} = \frac{1}{a}$	6) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	9) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^1$	

2. Vlastnosti exponenciální funkce

Obecný předpis exponenciální funkce je:

$$y = a^x,$$

kde a je základ pro který platí $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$, lze též psát podmínka $a > 0, a \neq 1$. Toto omezení vychází z toho, že exponenciální funkci pro záporný základ nelze vůbec definovat. Vyloučení hodnoty jedna je z důvodu, že při základu jedna dostáváme konstantní funkci, která do exponenciálních nepatří. Závěrem jen připomeňme, že proměnná x je v exponentu a odtud název funkce exponenciální.

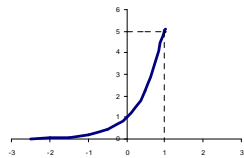
Grafem exponenciální funkce je křivka, která se nazývá exponenciála nebo exponenciela.

1) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti

$$f: y = 6^x$$

Pro náčrtek grafu použijeme tabulku funkčních hodnot

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1	6	36



$$D(f) = (-\infty; \infty)$$

$$H(f) = (0; \infty)$$

$$\text{rost } (-\infty; \infty)$$

$$\text{kles } -\text{není}$$

$$\text{JE prostá}; h = \text{není}; d = 0$$

$$\text{MAX} = \text{není}; \text{MIN} = \text{není}$$

$$\text{nic}$$

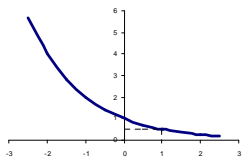
$$P_x = \text{není}; P_y = [1; 0]$$

2) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti

$$f: y = 6^{-x}$$

Pro náčrtek grafu použijeme tabulku funkčních hodnot

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1	6	36



$$D(f) = (-\infty; \infty)$$

$$H(f) = (0; \infty)$$

$$\text{rost } -\text{není}$$

$$\text{kles } (-\infty; \infty)$$

$$\text{JE prostá}; h = \text{není}; d = 0$$

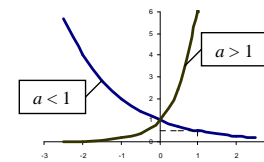
$$\text{MAX} = \text{není}; \text{MIN} = \text{není}$$

$$\text{nic}$$

$$P_x = \text{není}; P_y = [1; 0]$$

Obecné vlastnosti exponenciální funkce

$$y = a^x$$



$$D(f) = (-\infty; \infty)$$

$$H(f) = (0; \infty)$$

$$\text{rost } -\forall a \in (0; 1)$$

$$\text{kles } -\forall a \in (1; \infty)$$

$$\text{JE prostá}; h = \text{není}; d = 0$$

$$\text{MAX} = \text{není}; \text{MIN} = \text{není}$$

$$\text{nic}, P_x = \text{není}; P_y = [1; 0]$$

$$\text{asymptota osa } x: y = 0$$

3. Exponenciální funkce - rostoucí

- 1) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $g: y = 6^x$
- 2) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $h: y = 3^x$
- 3) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $k: y = 9^x$
- 4) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $m: y = 4^x$

4. Exponenciální funkce - klesající

- 1) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $g: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- 2) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $h: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- 3) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $k: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- 4) Načrtněte graf funkce a určete vlastnosti
 $m: y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

5. Exponenciální rovnice s úpravou

- 1) Řešte v \mathbf{R} :
 $3^{x+1} - 10 = 26 \cdot 3^{x-2} - 1$
VH: $x = 4$
- 2) Řešte v \mathbf{R} :
 $3^{x+1} - 10 = 25 \cdot 3^{x-2} - 4$
VH: $x = 3$
- 3) Řešte v \mathbf{R} :
 $3^{x+2} - 10 = 24 \cdot 3^{x-1} - 1$
VH: $x = 2$
- 4) Řešte v \mathbf{R} :
 $3^{x+2} - 10 = 23 \cdot 3^{x-1} - 6$
VH: $x = 1$
- 5) Řešte v \mathbf{R} :
 $2^{x+2} - 6 = 7 \cdot 2^{x-1} + 10$
VH: $x = 5$
- 6) Řešte v \mathbf{R} :
 $2^{x+1} + 15 = 11 \cdot 2^{x-2} + 3$
VH: $x = 4$
- 7) Řešte v \mathbf{R} :
 $2^{x+3} - 7 = 13 \cdot 2^{x-1} + 5$
VH: $x = 3$
- 8) Řešte v \mathbf{R} :
 $2^{x+2} - 8 = 6 \cdot 2^{x-3} + 5$
VH: $x = 2$

9) Řešte v **R**:

$$2^{x+4} - 4 = 21 \cdot 2^{x-1} + 7$$

$$\text{VH: } x = 1$$

10) Řešte v **R**:

$$3^x + 3^{x+1} = 108$$

$$\text{Sb-rce: } x = 3, \dots \text{ str. 144/1.4 - 1)}$$

11) Řešte v **R**:

$$2^{x+2} - 2^x = 96$$

$$\text{Sb-MM, Sb-rce, Sb-fce: } x = 5 \dots \text{ str. 144/1.4 - 2)}$$

12) Řešte v **R**:

$$3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$$

$$\text{Sb-rce: } x = 1 \dots \text{ str. 144/1.4 - 3)}$$

13) Řešte v **R**:

$$5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$$

$$\text{Sb-rce: } x = 1 \dots \text{ str. 144/1.4 - 4)}$$

14) Řešte v **R**:

$$7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$$

$$\text{Sb-rce: } x = 1 \dots \text{ str. 144/1.4 - 5)}$$

15) Řešte v **R**:

$$3 \cdot 2^x - 20 = 2^{x-1}$$

$$\text{Sb-rce: } x = 3 \dots \text{ str. 144/1.4 - 6)}$$

16) Řešte v **R**:

$$3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$$

$$\text{Sb-MM: } x = 6$$

17) Řešte v **R**:

$$3^{x+2} + 3^{x-2} = 82$$

$$\text{Sb-fce: } x = 2$$

18) Řešte v **R**:

$$4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} = 315$$

$$\text{VŠE, Sb-fce: } x = 3$$

19) Řešte v **R**:

$$4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} + 4^{x-1} + 240 = 0$$

$$\text{VŠE, Sb-fce: } x = 3$$

20) Řešte v **R**:

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$$

$$\text{Fce: } x = 3$$

6. Exponenciální rovnice s úpravou - základ < 1

1) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 6 = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 10$$

$$\text{VH: } x = -5$$

2) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7 = 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$$

$$\text{VH: } x = -3$$

21) Řešte v **R**:

$$4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$$

$$\text{VŠE: } x = 2$$

22) Řešte v **R**:

$$5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$$

$$\text{VŠE: } x = 2$$

23) Řešte v **R**:

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$$

$$\text{Sb-rce: } x = 9, \dots \text{ str. 144/1.5 - 2)}$$

24) Řešte v **R**:

$$2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$$

$$\text{Sb-rce: } x = 2, \dots \text{ str. 144/1.5 - 3)}$$

25) Řešte v **R**:

$$6^{x+2} - 5 \cdot 6^{x+1} - 30 \cdot 6^{x-1} = 36$$

$$\text{VH: } x = 2$$

26) Řešte v **R**:

$$2^{x+3} + 4 \cdot 2^{x-4} - 6 \cdot 2^{x+1} + 18 \cdot 2^{x-2} = 24$$

$$\text{VH: } x = 5$$

27) Řešte v **R**:

$$5^{x+2} + 5^{x+1} - 30 = 0$$

$$\text{Sb-fce: } x = 0$$

28) Řešte v **R**:

$$9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$$

$$\text{Sb-fce: } x = -1$$

29) Řešte v **R**:

$$5^x + 1 = 3 \cdot 5^{x-1} + 11$$

$$\text{VŠE: } x = 2$$

30) Řešte v **R**:

$$4^{x+1} - 15 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 4^{x-2} = 16$$

$$\text{VH: } x = 4$$

31) Řešte v **R**:

$$2^{x-1} + 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0$$

$$\text{VH: NŘ}$$

32) Řešte v **R**:

$$2^{x-1} + 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} + 48 = 0$$

$$\text{VH: } x = 5$$

5) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 15 = 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$$

$$\text{VH: } x = -4$$

6) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 10 = 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$$

$$\text{VH: } x = -4$$

7) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 10 = 25 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 4$$

$$\text{VH: } x = -3$$

8) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 10 = 24 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1$$

$$\text{VH: } x = -2$$

9) Řešte v **R**:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 10 = 23 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 6$$

$$\text{VH: } x = -1$$

7. Exponenciální - kvadratická rovnice

1) Řešte v **R**:

$$2^{2x+2} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

2) Řešte v **R**:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

3) Řešte v **R**:

$$2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

4) Řešte v **R**:

$$2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

5) Řešte v **R**:

$$2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

6) Řešte v **R**:

$$2^{2x+2} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

7) Řešte v **R**:

$$2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 1, \quad x_2 = -3$$

8) Řešte v **R**:

$$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

$$\text{Sb-fce: } x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

9) Řešte v **R**:

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } x_1 = 2, \quad x_2 = 0 \dots \text{str.71/2.4-a)}$$

10) Řešte v **R**:

$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

11) Řešte v **R**:

$$4^x - 6 \cdot 2^x = 160$$

$$\text{Sb-MM: } x = 4 \dots \text{str.71/2.4-b)}$$

12) Řešte v **R**:

$$4^x + 2^{x+1} = 80$$

$$\text{Sb-MM: } x = 3 \dots \text{str.71/2.4-c)}$$

13) Řešte v **R**:

$$9^{x+1} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } x = -2 \dots \text{str. 71/2.4 - d)}$$

14) Řešte v **R**:

$$9^{x+1} - 8 \cdot 3^x - 1 = 0$$

$$\text{VH: } x = 0$$

15) Řešte v **R**:

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$$

$$\text{VŠE: } x = 3$$

16) Řešte v **R**:

$$4^{4x} - 17 \cdot 4^{2x} + 16 = 0$$

$$\text{Sb-fce: } x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

17) Řešte v **R**:

$$4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$\text{Sb-rce: } x_1 = 3, \quad x_2 = 0 \dots \text{str. 145/1.6 - 1)}$$

18) Řešte v **R**:

$$6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$$

$$\text{! Sb-rce: } x_1 = 1, \quad x_2 = -1 \dots \text{str. 145/1.6 - 2)}$$

19) Řešte v **R**:

$$4^{2x+1} = 65 \cdot 4^{x-1} - 1$$

$$\text{Sb-rce: } x_1 = 1, \quad x_2 = -2 \dots \text{str. 145/1.6 - 3)}$$

20) Řešte v **R**:

$$3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x - 12 = 0$$

$$\text{Sb-rce: } x = 1 \dots \text{str. 145/1.6 - 4)}$$

21) Řešte v **R**:

$$3^{x+1} + 9^x = 108$$

$$\text{Sb-rce: } x = 2 \dots \text{str. 145/1.6 - 7)}$$

8. Exponenciální rovnice - základní

- 1) Řešte v **R**:
 $2^x = 16$
 Sb-MM: $x = 4$
- 2) Řešte v **R**:
 $5^x = \frac{1}{25}$
 Sb-MM: $x = -2$
- 3) Řešte v **R**:
 $4^z = \frac{1}{16}$
 VH: $z = -2$
- 4) Řešte v **R**:
 $10^y = 0,1$
 VH: $y = -1$
- 5) Řešte v **R**:
 $5^x = -25$
 VH: NŘ
- 6) Řešte v **R**:
 $7^y = 1$
 VH: $y = 0$
- 7) Řešte v **R**:
 $5^x = 125$
 VH: $x = 3$
- 8) Řešte v **R**:
 $3^z = 243$
 VH: $z = 5$
- 9) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{1}{5}\right)^z = 64$
 VH: $z = -6$
- 10) Řešte v **R**:
 $0,5^z = \frac{1}{32}$
 VH: $z = 5$
- 11) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{1}{3}\right)^y = \frac{1}{9}$
 VH: $y = 2$
- 12) Řešte v **R**:
 $6^x = \frac{1}{36}$
 VH: $x = -2$
- 13) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{1}{2}\right)^z = 0,5$
 VH: $z = 1$
- 14) Řešte v **R**:
 $0,3^y = 0,027$
 VH: $y = 3$
- 15) Řešte v **R**:
 $2^x = 2$
 VH: $x = 1$
- 16) Řešte v **R**:
 $3^y = 81$
 VH: $y = 4$
- 17) Řešte v **R**:
 $4^z = \frac{1}{64}$
 VH: $z = -3$
- 18) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$
 VH: $x = 0$
- 19) Řešte v **R**:
 $3^z = 0$
 VH: NŘ
- 20) Řešte v **R**:
 $2^y = \frac{1}{16}$
 VH: $y = -4$
- 21) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$
 VH: $x = 3$
- 22) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{9}{16}$
 VH: $x = -2$
- 23) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{3}{5}\right)^x = -\frac{9}{25}$
 VH: NŘ
- 24) Řešte v **R**:
 $\left(\frac{6}{7}\right)^x = \frac{36}{49}$
 VH: $x = 2$