

## Inverzní funkce (4)

### 1. Základní pojmy PTP

Úvodem připomeňme několik základních definic:

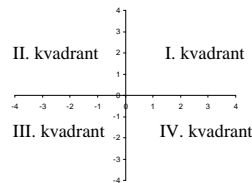
**Funkce** je předpis  $y = f(x)$ , který číslu  $x$  přiřadí právě jedno číslo  $y$ , kdy  $x$  je proměnná,  $y$  je funkční hodnota.

**Definiční obor** –  $D(f)$  je množina všech proměnných  $x$ .

**Obor hodnot** –  $H(f)$  je množina všech funkčních hodnot  $y$ .

**Prostá funkce** na daném intervalu  $I$  je, pokud každá funkční hodnota  $y$  má právě jednu proměnnou  $x$ .

Dále budeme používat při zobrazování do souřadných os označení kvadrantů. První kvadrant je vpravo nahoře, druhý vlevo nahoře, třetí vlevo dole a čtvrtý vpravo dole viz obrázky níže.



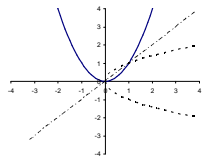
**Def:** **Inverzní funkce** k dané prosté funkci  $f$  je funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí:  $D(f^{-1}) = H(f)$  a zároveň každému  $y \in D(f^{-1})$  je přiřazeno právě to  $x \in D(f)$ , pro které je  $f(x) = y$

Určení inverzní funkce se provádí tak, že v daném předpisu  $f: y = f(x)$  prohodíme proměnnou  $x$  a funkční hodnotu  $y$ , a vyjádříme  $y$ . Takto vznikne nový předpis, který je funkcí inverzní  $f^{-1}: y = g(x)$

**Věta:** Graf inverzní funkce je osově symetrický k původní funkci podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Podle výše uvedených definic funkce  $f$  přiřadí číslu  $x$  právě jedno číslo  $y$ . Inverzní funkce  $f^{-1}$  je cesta zpátky, to znamená, že přiřadí číslu  $y$  právě jedno číslo  $x$ .

Proto je nutnou podmínkou prostost původní funkce  $f$  tak, aby existovala jednoznačná cesta zpět. Uvedme příkladem, neprostou funkci kvadratickou:  $f: y = x^2$



Pokud načrtneme graf funkce  $f$ , a podle výše uvedené věty i graf inverzní funkce do jednoho obrázku podle osové symetrie vidíme, že inverzní „funkce“ nemůže být funkcí. Není totiž splněna podmínka, že proměnné  $x$  přiřadí právě jednu funkční hodnotu  $y$ . Například číslu  $x = 1$  přiřazuje hodnotu  $y = 1$  a zároveň  $y = -1$ .

### 2. Lineární funkce

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$f: y = 2x - 3$$

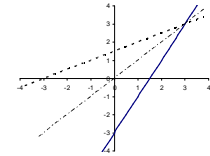
$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$D(f) = (-\infty; \infty); H(f) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [\frac{3}{2}; 0]; P_y = [0; -3]$$

$$D(f^{-1}) = (-\infty; \infty); H(f^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [-3; 0]; P_y = [0; \frac{3}{2}]$$



- 2) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$h: y = \frac{1}{2}x + 1$$

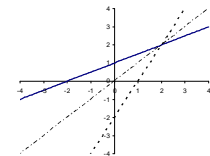
$$h^{-1}: y = 2x - 2$$

$$D(h) = (-\infty; \infty); H(h) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-2; 0]; P_y = [0; 1]$$

$$D(h^{-1}) = (-\infty; \infty); H(h^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [1; 0]; P_y = [0; -2]$$



- 3) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$m: y = x - 2$$

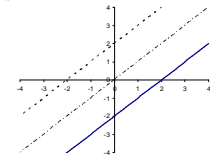
$$m^{-1}: y = x + 2$$

$$D(m) = (-\infty; \infty); H(m) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-2; 0]; P_y = [0; 2]$$

$$D(m^{-1}) = (-\infty; \infty); H(m^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [2; 0]; P_y = [0; -2]$$



- 4) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$k: y = -2x - 2$$

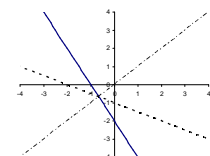
$$k^{-1}: y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$D(k) = (-\infty; \infty); H(k) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-1; 0]; P_y = [0; -2]$$

$$D(k^{-1}) = (-\infty; \infty); H(k^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [-2; 0]; P_y = [0; -1]$$



**3. Lomená funkce**

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$f: y = \frac{1}{x} - 1$$

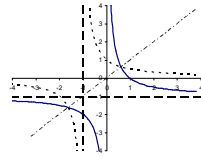
$$f^{-1}: y = \frac{1}{x+1}$$

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty); H(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [1; 0]; P_y = \text{není}$$

$$D(f^{-1}) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty); H(f^{-1}) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$P_x = \text{není}; P_y = [0; 1]$$



- 2) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$g: y = \frac{1}{x-1}$$

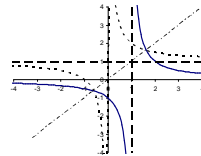
$$g^{-1}: y = \frac{1}{x} + 1$$

$$D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty); H(g) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \text{není}; P_y = [0; -1]$$

$$D(g^{-1}) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty); H(g^{-1}) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$$

$$P_x = [-1; 0]; P_y = \text{není}$$



- 3) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$h: y = \frac{1}{x+2}$$

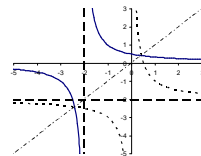
$$h^{-1}: y = \frac{1}{x} - 2$$

$$D(h) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty); H(h) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \text{není}; P_y = [0; \frac{1}{2}]$$

$$D(h^{-1}) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty); H(h^{-1}) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$$

$$P_x = [\frac{1}{2}; 0]; P_y = \text{není}$$



- 4) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$m: y = \frac{1}{x} + 3$$

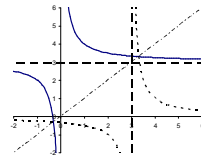
$$m^{-1}: y = \frac{1}{x-3}$$

$$D(m) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty); H(m) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-\frac{1}{3}; 0]; P_y = \text{není}$$

$$D(m^{-1}) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty); H(m^{-1}) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$P_x = \text{není}; P_y = [0; -\frac{1}{3}]$$

**4. Kubická funkce**

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$f: y = x^3 - 1$$

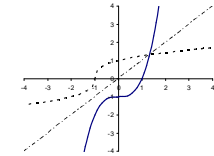
$$f^{-1}: y = \sqrt[3]{x+1}$$

$$D(f) = (-\infty; \infty); H(f) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [1; 0]; P_y = [0; -1]$$

$$D(f^{-1}) = (-\infty; \infty); H(f^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [-1; 0]; P_y = [0; 1]$$



- 2) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$g: y = x^3 + 1$$

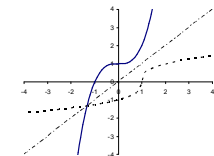
$$g^{-1}: y = \sqrt[3]{x-1}$$

$$D(g) = (-\infty; \infty); H(g) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-1; 0]; P_y = [0; 1]$$

$$D(g^{-1}) = (-\infty; \infty); H(g^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [1; 0]; P_y = [0; -1]$$



- 3) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$k: y = (x-2)^3;$$

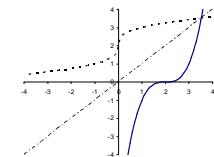
$$k^{-1}: y = \sqrt[3]{x} + 2$$

$$D(k) = (-\infty; \infty); H(k) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [2; 0]; P_y = [0; -8]$$

$$D(k^{-1}) = (-\infty; \infty); H(k^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [-8; 0]; P_y = [0; 2]$$



- 4) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$a: y = (x+1)^3;$$

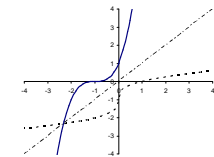
$$a^{-1}: y = \sqrt[3]{x} - 1$$

$$D(a) = (-\infty; \infty); H(a) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-1; 0]; P_y = [0; 1]$$

$$D(a^{-1}) = (-\infty; \infty); H(a^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [1; 0]; P_y = [0; -1]$$



### 5. Exponenciální funkce

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$b: y = 3^x + 1$$

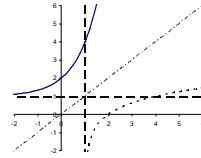
$$b^{-1}: y = \log_3(x-1)$$

$$D(b) = (-\infty; \infty); H(b) = (1; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \text{není}; P_y = [0; 2]$$

$$D(b^{-1}) = (1; \infty); H(b^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [2; 0]; P_y = \text{není}$$



- 2) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$f: y = 2^x - 2$$

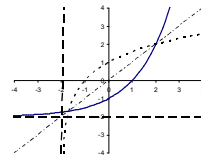
$$f^{-1}: y = \log_2(x+2)$$

$$D(f) = (-\infty; \infty); H(f) = (-2; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [1; 0]; P_y = [0; -1]$$

$$D(f^{-1}) = (-2; \infty); H(f^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [-1; 0]; P_y = [0; 1]$$



- 3) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$k: y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$$

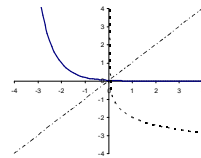
$$k^{-1}: y = \log_{\frac{1}{5}}(x-2)$$

$$D(k) = (-\infty; \infty); H(k) = (0; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \text{není}; P_y = \left[0; \frac{1}{25}\right]$$

$$D(k^{-1}) = (0; \infty); H(k^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = \left[\frac{1}{25}; 0\right]; P_y = \text{není}$$



- 4) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$g: y = 10^{x+1}$$

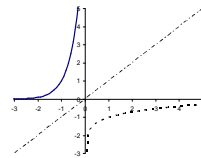
$$g^{-1}: y = \log x - 1$$

$$D(g) = (-\infty; \infty); H(g) = (0; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \text{není}; P_y = [0; 10]$$

$$D(g^{-1}) = (0; \infty); H(g^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [10; 0]; P_y = \text{není}$$



### 6. Logaritmická funkce

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$m: y = \log_6 x + 2$$

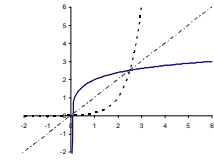
$$m^{-1}: y = 6^{x-2}$$

$$D(m) = (0; \infty); H(m) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = \left[0; \frac{1}{36}\right]; P_y = \text{není}$$

$$D(m^{-1}) = (-\infty; \infty); H(m^{-1}) = (0; \infty)$$

$$P_x = \text{není}; P_y = \left[0; \frac{1}{36}\right]$$



- 2) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$f: y = \log_2 x - 2$$

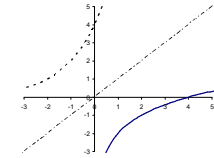
$$f^{-1}: y = 2^{x+2}$$

$$D(f) = (0; \infty); H(f) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [0; 4]; P_y = \text{není}$$

$$D(f^{-1}) = (-\infty; \infty); H(f^{-1}) = (0; \infty)$$

$$P_x = \text{není}; P_y = [0; 4]$$



- 3) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$k: y = \log_4(x+1)$$

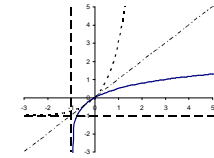
$$k^{-1}: y = 4^x - 1$$

$$D(k) = (-1; \infty); H(k) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [0; 0]; P_y = [0; 0]$$

$$D(k^{-1}) = (-\infty; \infty); H(k^{-1}) = (-1; \infty)$$

$$P_x = [0; 0]; P_y = [0; 0]$$



- 4) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$g: y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

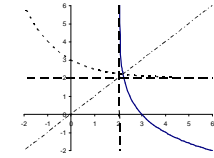
$$g^{-1}: y = \frac{1}{2}^x + 2$$

$$D(g) = (2; \infty); H(g) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [3; 0]; P_y = \text{není}$$

$$D(g^{-1}) = (-\infty; \infty); H(g^{-1}) = (2; \infty)$$

$$P_x = \text{není}; P_y = [0; 3]$$



**7. Něco navíc**

- 1) Pro zadanou funkci určete funkci inverzní a do jednoho obrázku načrtněte oba grafy, u obou funkcí určete definiční obor, obor hodnot a průsečíky s osami:

$$g: y = 3x + 3$$

$$g^{-1}: y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$D(g) = (-\infty; \infty); H(g) = (-\infty; \infty)$$

$$\text{VH: } P_x = [-1; 0]; P_y = [0; 3]$$

$$D(g^{-1}) = (-\infty; \infty); H(g^{-1}) = (-\infty; \infty)$$

$$P_x = [3; 0]; P_y = [0; -1]$$

