Komplexní čísla (4)

1. Základní pojmy

Komplexní čísla zpravidla označujeme malými písmenky např. *z*, *u*, *v*, …

Def: Komplexní číslo je uspořádaná dvojice čísel:
$z = a + bi$ … algebraický tvar komplexního čísla, kde
a … reálná část komplexního čísla, $a \in R$
b … imaginární část komplexního čísla, $b \in R$
i … imaginární (komplexní) jednotka
Pro komplexní jednotku platí: $i^2 = -1$

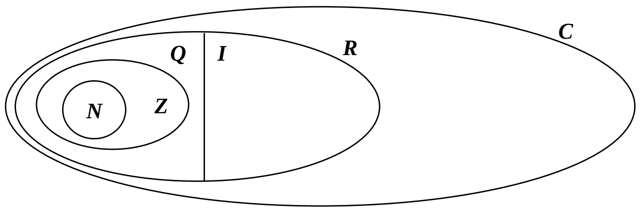
např. $z = 3 + 2i$

Def: Číslo komplexně sdružené k číslu $z = a + bi$ je číslo $\overline{z} = a - bi$

např. $z = 3 + 2i$, k tomuto číslu je číslo komplexně sdružené $\overline{z} = 3 - 2i$
$a = 7 - i$, k tomuto číslu je číslo komplexně sdružené $\overline{a} = 7 + i$
$b = 7 + i$, k tomuto číslu je číslo komplexně sdružené $\overline{b} = 7 - i$

Poznámka: Pokud je imaginární část komplexního čísla nulová, vznikne číslo reálné, které stále považujeme za číslo komplexní. Například $z = -5 + 0i = 5$. To znamená, že reálná čísla tvoří podmnožinu komplexních čísel.

Připomeňme základní číselné množiny:
N … přirozená čísla – celá kladná čísla: N = {1, 2, 3, 4, …}
Z … celá čísla – prostě celá čísla: Z = {…,-2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
R … reálná čísla – všechna čísla na ose: R = (-∞; ∞)
Q … racionální čísla – všechna čísla, která lze zapsat zlomkem,
např.: $\left\{\frac{3}{4}; -\frac{2}{1}; 6; 0{,}5; 0; \frac{16}{2}; ...\right\}$
I … iracionální čísla – všechna čísla, která nelze zapsat zlomkem,
např.: $\left\{\pi; \sqrt{2}; \sqrt{51}; \sqrt{6}; \sqrt{332}; nikoli \sqrt{1}; nikoli \sqrt{4}; nikoli \sqrt{0}; \sqrt{3} ...\right\}$
C … komplexní čísla – čísla ve tvaru $z = a + bi$, dle pravidel viz výše.



Matematické operace s komplexními čísly
Nechť jsou dvě komplexní čísla:
$a = 3 - 4i$
$b = -2 + i$

1) Sčítání komplexních čísel provádíme tak, že sečteme zvlášť reálnou část komplexního čísla a zvlášť imaginární část:
$a + b = (3 - 4i) + (-2 + i) = 3 - 2 - 4i + i = 1 - 3i$

2) Odečítání komplexních čísel provádíme tak, že odečteme *b* jako dvojčlen s mínus před závorkou, a pak postupujeme jako u součtu:
$a - b = (3 - 4i) - (-2 + i) = 3 - 4i + 2 - i = 5 - 5i$

3) Násobení komplexních čísel provádíme tak, že roznásobujeme komplexní čísla jako dvojčleny každý člen s každým. Připomeňme, že kvadrát imaginární jednotky je roven mínus jedné. Dále pokračujeme podle pravidel pro sčítání a odečítání:
$a \cdot b = (3 - 4i) \cdot (-2 + i) = -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -6 + 11i - 4(-1) = -2 + 11i$
$b \cdot \overline{b} = (-2 + i) \cdot (-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 + 1 = 5$

4) Mocniny komplexních čísel provádíme tak, že umocňujeme závorku jako dvojčlen:
$a^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$
$b^3 = (-2 + i)^3 = (-2 + i)(4 - 4i + i^2) = (-2 + i)(3 - 4i) = -6 + 8i + 3i + 4 = -2 + 11i$

5) Dělení komplexního čísla číslem reálným vychází ze struktury zlomku tzn. každý člen čitatele je dělený společným jmenovatelem:
$\frac{a}{2} = \frac{3 - 4i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} i = \frac{3}{2} - 2i$

6) Dělení komplexních čísel vychází z vlastnosti uvedené v bodu č. 3, kdy součin komplexního čísla s číslem komplexně sdruženým je číslo reálné. Při dělení dvou komplexních čísel zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli zlomku, čímž převedeme úlohu na případ uvedený v bodu č. 5 tj. dělení komplexního čísla číslem reálným:
$$\frac{b}{a} = \frac{-2 + i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{-6 - 8i + 3i + 4i^2}{9 - 16i^2} = \frac{-10 - 5i}{25} = -\frac{10}{25} - \frac{5}{25} i = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5} i$$
$$\frac{a}{b} = \frac{3 - 4i}{-2 + i} \cdot \frac{-2 - i}{-2 - i} = \frac{-6 - 3i + 8i + 4i^2}{4 - i^2} = \frac{-10 + 5i}{5} = -2 + i$$

Absolutní hodnota reálného čísla
V množině reálných čísel můžeme absolutní hodnotu definovat jako funkci, která kladnému číslu přiřadí číslo stejné. Číslu zápornému přiřadí číslo opačné, tedy opět kladné. V níže uvedené definici je uvedena jiná z možností:

$\forall x \in R: \quad |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x}$

Pro definici absolutní hodnoty komplexní čísla můžeme najít jistou analogii:

$\forall z \in C: \quad |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

po úpravě dostaneme známý tvar: $\forall z \in C, z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Umocňování komplexních čísel

1) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$$
Sb-MM: $-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i$ …str.140/1.4-c)

2) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{(1+i)^3}{2(1-i)}$$
Sb-MM: $-1+0i$ …str.140/1.4-e)

3) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{(2-i)^3}{(1-i)(3+i)}$$
VH: $\frac{3}{2}-2i$

4) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{(2+i)^3}{(2-i)(1+2i)}$$
VH: $\frac{41}{25}+\frac{38}{25}i$

5) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$3(2+i)-(3-i)^2$$
Sb-MM: $-2+9i$ …str.139/1.1-d)

6) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$(1-2i)^2-(1+2i)^2$$
Sb-MM: $0-8i$ …str.139/1.1-e)

7) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{2+i}{3-i}$$
Sb-MM: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ …str.140/1.4-a)

3. Dělení komplexních čísel

1) Určete imaginární část komplexního čísla:
$$\frac{-1+i}{1+i}$$
VŠE: $0+i$

2) Určete imaginární část komplexního čísla:
$$\frac{1-i}{-i}$$
VŠE: $1+i$

3) Určete imaginární část komplexního čísla:
$$\frac{1+i}{1-i}$$
VŠE: $0+i$

4) Určete imaginární část komplexního čísla:
$$\frac{1-i}{i}$$
VŠE: $-1-i$

5) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$$\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$$
Sb-MM: $0+2i$ …str.140/1.4-b)

6) Zjednodušte:
$$\frac{1+i}{1-2i}-\frac{i}{1+i}$$
Radl: $-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i$

7) Zjednodušte:
$$\frac{15-5i}{1+2i}-\frac{1-3i}{i}$$
Radl: $4-6i$

8) Zjednodušte:
$$\frac{2+i}{3-i}+(i-2)(4-i)$$
Radl: $-\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i$

9) Zjednodušte:
$$\frac{2+4i}{1+i}(2-i)$$
Radl: $7-i$

10) Zjednodušte:
$$\frac{i+1}{i}:\frac{i-1}{2i+3}$$
Radl: $-3-2i$

11) Zjednodušte:
$$\left(\frac{i-1}{i}+\frac{i}{i-1}\right)\cdot(2i-3)$$
Radl: $-\frac{11}{2}+\frac{3}{2}i$

12) Zjednodušte:
$$\frac{(1-i)^2\cdot(\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}}+i^{19}$$
Radl: $2-i$

13) Zjednodušte:
$$\tfrac{1}{6}(3-i\sqrt{2})^2-(3+i\sqrt{2})^2\cdot i^{18}$$
Radl: $\frac{49}{6}+5\sqrt{2}i$

4. Operace s komplexními čísly

1) Zjednodušte:

$$\frac{2-4i}{1+i}+(1+2i)^2\cdot i^7$$

Radl: $3+0i$

2) Zjednodušte:

$$\frac{1-3i}{2+i}+\frac{1+3i}{2-i}\cdot i^9$$

Radl: $-\frac{8}{5}-\frac{8}{5}i$

3) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

$$(-2+3i)^2\cdot i^5+\frac{13-26i}{3+2i}-(1-i)\cdot(1+i)$$

Sb-MM: $9-13i$ …str.140/1.5-a)

4) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

$$(-3+2i)\cdot i^3-\frac{10-2i}{-3+i}+(-1-i)^2$$

Sb-MM: $\frac{52}{10}+\frac{54}{10}i$ …str.140/1.5-b)

5. Absolutní hodnota komplexních čísel

1) Určete:

$$\left|(3+2i)(1-i)+(1+2i)^2\right|$$

VH: $|2+3i|=\sqrt{13}$

2) Určete:

$$\left|(2+i)^2-(2+5i)(1-i)\right|$$

VH: $|-4+i|=\sqrt{17}$

3) Určete:

$$\left|(2+i)(-2+3i)+(1-i)^2\right|$$

VH: $|-7+2i|=\sqrt{53}$

4) Určete:

$$\left|(3+2i)^2-(2+4i)(5+i)\right|$$

VH: $|-1-10i|=\sqrt{101}$

5) Určete:

$$\left|1-i+\frac{1+2i}{3-i}\right|$$

G: $\frac{1}{10}\sqrt{130}$

6) Určete:

$$\left||2+3i|^2+(2+3i)^2\right|$$

G: $4\sqrt{13}$