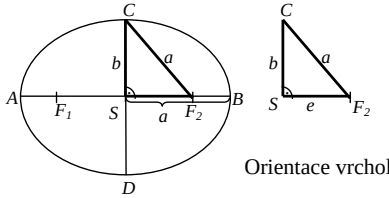
Elipsa (4)

1. Základní pojmy

Def: Elipsa je množina bodů, které mají od dvou pevně daných bodů (ohnisek) konstantní součet vzdáleností.



A, B … vrcholy
C, D … vrcholy
F_1, F_2 … ohniska
$a = |SA| = |SB|$ … vodorovná poloosa
$b = |SC| = |SD|$ … svislá poloosa
$e = |SF_1| = |SF_2|$ … excentricita
$o = F_1F_2$ … hlavní osa elipsy

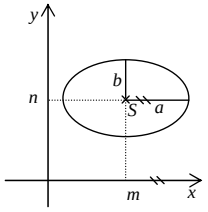
Orientace vrcholů A, B, C, D je pro naše účely jednoznačná

Rovnice elipsy

Označme $S = [m; n]$ … střed kružnice,
a … vodorovná poloosa, rovnoběžná s osou x,
b … svislá poloosa, rovnoběžná s osou y.

A/ hlavní osa rovnoběžná s osou x

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$ … středová rovnice elipsy

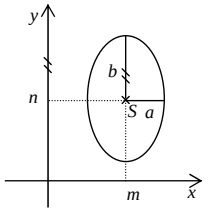


$a > b$ … poloosa a je hlavní poloosou, pak platí:

Pythagorova věta: $a^2 = b^2 + e^2$

B/ hlavní osa rovnoběžná s osou y

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$ … středová rovnice elipsy



$b > a$ … poloosa b je hlavní poloosou, pak platí:

Pythagorova věta: $b^2 = a^2 + e^2$

Po odstranění zlomků, umocněním závorek a uspořádáním v pořadí kvadratický, lineární a absolutní člen, získáme obecnou rovnici elipsy:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Poznámka: V případě, že obě poloosy jsou stejné, vzniká přirozeně kružnice. Pokud do středové rovnice elipsy dosadíme poloměr za obě poloosy $r = a = b$:

$$\frac{(x-m)^2}{r^2} + \frac{(y-n)^2}{r^2} = 1$$

a odstraníme zlomky získáme již známou středovou rovnici kružnice.

2. Určení obecné rovnice elipsy ze souřadnic vrcholů

1) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[2; -2], vrchol C=[4; 1], hlavní osa rovnoběžná s osou y.
   VH: S=[4; -2], a = 2, b = 3, $e = \sqrt{5}$, $9x^2 + 4y^2 - 72x + 16y + 124 = 0$
2) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[-5; 2], vrchol C=[-6; 4], hlavní osa rovnoběžná s osou y.
   VH: S=[-6; 2], a = 1, b = 2, $e = \sqrt{3}$, $4x^2 + 1y^2 + 48x - 4y + 144 = 0$
3) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[1; 5], vrchol D=[3; 1], hlavní osa rovnoběžná s osou y.
   VH: S=[3; 5], a = 2, b = 4, $e = \sqrt{12}$, $4x^2 + 1y^2 - 24x - 10y + 45 = 0$
4) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[4; 4], vrchol D=[1; -1], hlavní osa rovnoběžná s osou y.
   VH: S=[1; 4], a = 3, b = 5, e = 4, $25x^2 + 9y^2 - 50x - 72y - 56 = 0$
5) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[0; 3], vrchol D=[-2; -1], hlavní osa rovnoběžná s osou y.
   VH: S=[-2; 3], a = 2, b = 4, $e = \sqrt{12}$, $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 9 = 0$
6) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[2; 1], vrchol C=[-3; 4], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
   VH: S=[-3; 1], a = 5, b = 3, e = 4, $9x^2 + 25y^2 + 54x - 50y - 119 = 0$
7) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[0; 3], vrchol D=[-4; 0], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
   VH: S=[-4; 3], a = 4, b = 3, $e = \sqrt{7}$, $9x^2 + 16y^2 + 72x - 96y + 144 = 0$
8) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[-5; 5], vrchol C=[-2; 6], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
   VH: S=[-2; 5], a = 3, b = 1, $e = \sqrt{8}$, $x^2 + 9y^2 + 4x - 90y + 220 = 0$
9) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[-1; 4], vrchol D=[2; 2], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
   VH: S=[2; 4], a = 3, b = 2, $e = \sqrt{5}$, $4x^2 + 9y^2 + -16x - 72y + 124 = 0$
10) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[-4; -4], vrchol C=[1; -1], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
    VH: S=[1; -4], a = 5, b = 3, e = 4, $9x^2 + 25y^2 - 18x + 200y + 184 = 0$
11) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[0; -3], vrchol C=[-3; -1], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
    VH: S=[-3; -3], a = 3, b = 2, $e = \sqrt{5}$, $4x^2 + 9y^2 + 24x + 54y + 81 = 0$
12) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol B=[3; 6], vrchol D=[1; 5], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
    VH: S=[1; 6], a = 2, b = 1, $e = \sqrt{3}$, $x^2 + 4y^2 - 2x - 48y + 141 = 0$
13) Napište obecnou rovnici elipsy a excentricitu, je-li dáno: vrchol A=[-5; 5], vrchol C=[-2; 6], hlavní osa rovnoběžná s osou x.
    VH: S=[2; 2], a = 4, b = 2, $e = \sqrt{12}$, $4x^2 + 16y^2 - 16x - 64y + 16 = 0$

3. Určení obecné rovnice elipsy ze souřadnic vrcholů

1) Napište obecnou rovnici elipsy, je-li dáno: vrcholy A=[-9; 3], B=[-1; 3] a ohniska F_1=[-8; 3], F_2=[-2; 3].
   VH: S=[-5; 3], a = 4, b = $\sqrt{7}$, e =3, $7x^2 + 16y^2 + 70x - 96y + 207 = 0$
2) Napište obecnou rovnici elipsy, je-li dáno: vrcholy A=[-2; 1], B=[4; 1] a ohniska F_1=[0; 1], F_2=[2; 1].
   VH: S=[1; 1], a = 3, b = $\sqrt{8}$, e =1, $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$
3) Napište obecnou rovnici elipsy, je-li dáno: vrcholy C=[3; 4], D=[3; 0] a ohniska F_1=[3; 1], F_2=[3; 3].
   VH: S=[1; 1], a = $\sqrt{5}$, b =2, e =1, $4x^2 + 5y^2 - 24x - 20y + 36 = 0$
4) Napište obecnou rovnici elipsy, je-li dáno: vrcholy C=[2; -1], D=[2; -7] a ohniska F_1=[2; -2], F_2=[2; -6].
   VH: S=[2; -4], a = $\sqrt{5}$, b =3, e =2, $9x^2 + 5y^2 - 36x + 40y + 71 = 0$

4. Převedení obecné rovnice elipsy na středovou

1) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $9x^2 + 25y^2 + 54x - 50y - 119 = 0$
   S=[-3; 1], a = 5, b = 3, e = 4,
2) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $9x^2 + 16y^2 + 72x - 96y + 144 = 0$
   S=[-4; 3], a = 4, b = 3, e = $\sqrt{7}$,
3) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $x^2 + 9y^2 + 4x - 90y + 220 = 0$
   S=[-2; 5], a = 3, b = 1, e = $\sqrt{8}$,
4) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $4x^2 + 9y^2 - 16x - 72y + 124 = 0$
   S=[2; 4], a = 3, b = 2, e = $\sqrt{5}$,
5) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $9x^2 + 25y^2 - 18x + 200y + 184 = 0$
   S=[1; -4], a = 5, b = 3, e = 4,
6) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $4x^2 + 9y^2 + 24x + 54y + 81 = 0$
   S=[-3; -3], a = 3, b = 2, e = $\sqrt{5}$,
7) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $x^2 + 4y^2 - 2x - 48y + 141 = 0$
   S=[1; 6], a = 2, b = 1, e = $\sqrt{3}$,
8) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 4 = 0$
   S=[2; 2], a = 4, b = 2, e = $\sqrt{12}$,
9) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
   $9x^2 + 4y^2 - 72x + 16y + 124 = 0$
   S=[4; -2], a = 2, b = 3, e = $\sqrt{5}$,
10) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
    $4x^2 + 1y^2 + 48x - 4y + 144 = 0$
    S=[-6; 2], a = 1, b = 2, e = $\sqrt{3}$,

11) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
    $4x^2 + y^2 - 24x - 10y + 45 = 0$
    S=[3; 5], a = 2, b = 4, e = $\sqrt{12}$,
12) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
    $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 9 = 0$
    S=[-2; 3], a = 2, b = 4, e = $\sqrt{12}$,
13) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
    $25x^2 + 9y^2 - 50x - 72y - 56 = 0$
    S=[1; 4], a = 3, b = 5, e = 4,
14) Určete střed, délky poloos a excentricitu elipsy určené rovnicí:
    $16x^2 + y^2 - 64x - 2y + 1 = 0$
    S=[2; 1], a = 2, b = 8, e = $\sqrt{60}$,

5. Vzájemná poloha elipsy a přímky

1) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 9y^2 - 2x - 18y - 26 = 0$ a přímky p: $x + 3y + 2 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[-5; 1], P_2=[1; -1].
2) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 4y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$ a přímky p: $x + 2y + 1 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[1; -1], P_2=[-3; 1].
3) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 4y^2 - 22x - 16y + 101 = 0$ a přímky p: $x + 2y - 9 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[11; -1], P_2=[5; 2].
4) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 4 = 0$ a přímky p: $x + 2y - 2 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[2; 0], P_2=[10; -4].
5) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 16y^2 - 4x - 96y + 132 = 0$ a přímky p: $x - 4y + 6 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[6; 3], P_2=[2; 2].
6) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 16y^2 + 12x - 64y + 36 = 0$ a přímky p: $x - 4y + 6 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[2; 2], P_2=[-6; 0].
7) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $x^2 + 25y^2 - 10x + 100y + 25 = 0$ a přímky p: $x - 5y - 5 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[-5; -2], P_2=[5; 0].
8) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $4x^2 + y^2 - 32x - 6y + 37 = 0$ a přímky p: $2x + y - 5 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[4; -3], P_2=[1; 3].
9) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $9x^2 + y^2 - 18x - 6y - 18 = 0$ a přímky p: $3x - y - 6 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
   P_1=[1; -3], P_2=[3; 3].
10) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $9x^2 + y^2 + 36x - 4y + 31 = 0$ a přímky p: $3x + y + 1 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
    P_1=[-2; 5], P_2=[-1; 2].
11) Určete vzájemnou polohu elipsy e: $16x^2 + y^2 - 64x - 6y + 57 = 0$ a přímky p: $4x - y - 1 = 0$. Pokud mají společné body, tak určete jejich souřadnice.
    P_1=[2; 7], P_2=[1; 3].