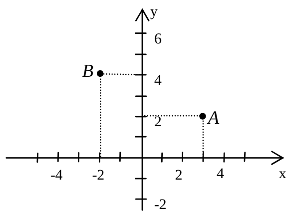
Gaussova rovina komplexních čísel (4)

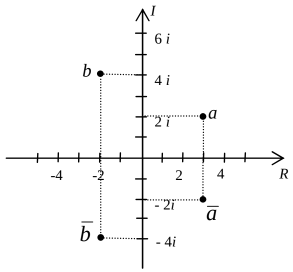
1. Základní pojmy

Z analytické geometrie a grafů funkcí dobře známe grafické znázornění bodů do souřadné soustavy. Například bod $A=[3;2]$, $B=[-2;4]$ chápeme jako uspořádanou dvojici čísel, kde první číslo je souřadnice *x*, a druhé souřadnice *y*:



Komplexní čísla v algebraickém tvaru $z=a+bi$ představují uspořádanou dvojici čísel. Tuto dvojici lze také znázornit do roviny, kterou nazýváme *Gaussova rovina komplexních čísel*. Na vodorovnou osu se vyznačuje reálná část komplexního čísla, a na svislou imaginární část včetně komplexní jednotky. Například čísla znázorníme takto:

$a=3+2i$
$\overline{a}=3-2i$
$b=-2+4i$
$\overline{b}=-2-4i$



Věta: Čísla komplexně sdružená se v Gaussově rovině zobrazují souměrně podle reálné osy.

2. Goniometrický tvar komplexního čísla I.

1) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$4\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$
Sb-MM: $4+4i$ …str.141/2.2-a)
2) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$5\sqrt{3}(\cos 120° + i\sin 120°)$
Sb-MM: $-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{15}{2}i$ …str.141/2.2-b)
3) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$27(\cos 180° + i\sin 180°)$

Sb-MM: $-27+0i$ …str.141/2.2-c)
4) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$\frac{7}{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$
Sb-MM: $-\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{7}{4}i$ …str.141/2.2-d)
5) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$4\sqrt{3}(\cos 150° + i\sin 150°)$
VH: $-6+2\sqrt{3}i$
6) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$\sqrt{20}(\cos 270° + i\sin 270°)$
VH: $0-2\sqrt{5}i$

3. Goniometrický tvar komplexního čísla II.

1) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$7(\cos \frac{1}{6}\pi + i\sin \frac{1}{6}\pi)$
Sb-MM: $\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}i$ …str.141/2.3-a)
2) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$3\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i\sin \frac{3}{4}\pi)$
Sb-MM: $-3+3i$ …str.141/2.3-b)
3) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$2\sqrt{3}(\cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi)$
Sb-MM: $-\sqrt{3}-3i$ …str.141/2.3-c)
4) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$10(\cos \frac{11}{6}\pi + i\sin \frac{11}{6}\pi)$
Sb-MM: $\frac{10\sqrt{3}}{2}-5i$ …str.141/2.3-d)
5) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$\sqrt{12}(\cos \frac{1}{3}\pi + i\sin \frac{1}{3}\pi)$
VH: $\sqrt{3}+3i$
6) Komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru:
$\sqrt{8}(\cos \pi + i\sin \pi)$
VH: $-2\sqrt{2}+0i$

4. Goniometrický tvar komplexního čísla

1) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z=3$
Sb-MM: $3(\cos 0° + i\sin 0°)$ …str.141/2.4-a)
2) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z=-2$
Sb-MM: $2(\cos 180° + i\sin 180°)$ …str.141/2.4-b)
3) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z=2i$

Sb-MM: $2(\cos 90° + i \sin 90°)$ …str.141/2.4-c)

4) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = 2 - 2i$
Sb-MM: $2\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$ …str.141/2.4-d)

5) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = -1 + \sqrt{3}i$
Sb-MM: $2(\cos 120° + i \sin 120°)$ …str.141/2.4-e)

6) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$
Sb-MM: $6(\cos 225° + i \sin 225°)$ …str.141/2.4-f)

7) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = 2\sqrt{3} + 2i$
Sb-MM: $4(\cos 30° + i \sin 30°)$ …str.141/2.4-g)

8) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = \sqrt{3} - 3i$
VH: $2\sqrt{3}(\cos 300° + i \sin 300°)$

9) Komplexní číslo vyjádřete v goniometrickém tvaru:
$z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} i$
VH: $5(\cos 135° + i \sin 135°)$

5. Určení kvadratická rovnice

1) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo $\boldsymbol{x_1}$:
$$x_1 = \frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{2i}$$
G: $x_1 = \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i \Rightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0$

6. Moivreova věta

1) Vypočtěte:
$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{71}$
G: $z^{71} = 2^{71}(\cos 71 \cdot \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{142}{3}\pi) = 2^{70}(-1 - \sqrt{3}i)$

2) Vypočtěte:
$\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^{25}$
VH: $z^{25} = 4^{25}(\cos 25 \cdot \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{25}{6}\pi) = 4^{25}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)$

3) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(1 + i)^{11}$

VH: $x_1 = (\sqrt{2})^{11}(\cos 11 \cdot \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{11}{4}\pi) = 2^{\frac{11}{2}}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i) = -32 + 32i$

4) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(-1 - i)^{27}$
VH: $x_1 = (\sqrt{2})^{27}(\cos 27 \cdot \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi) = 2^{\frac{27}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) = 2^{13} - 2^{13} i$

5) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(-1 + i)^{21}$
VH: $x_1 = (\sqrt{2})^{21}(\cos 21 \cdot \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi) = 2^{\frac{21}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) = 2^{10} - 2^{10} i$

6) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(1 - i)^{15}$
VH: $x_1 = (\sqrt{2})^{15}(\cos 15 \cdot \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi) = 2^{\frac{15}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i) = 2^7 + 2^7 i$

7) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(-1 + i)^{18}$
VH: $x_1 = (\sqrt{2})^{18}(\cos 18 \cdot \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi) = 2^{\frac{18}{2}}(0 - 1i) = -2^9 i$

8) Vypočtěte:
$\left(\sqrt{3} - i\right)^8$
G: $z^8 = 2^7(-1 + \sqrt{3}i)$

9) Vypočtěte:
$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{15}$
VH: $x_1 = 2^{15}(\cos 15 \cdot \frac{1}{3}\pi + i \sin \pi) = 2^{15}(-1 + 0i) = -2^{15}$

10) Vypočtěte:
$\left(-\sqrt{3} + i\right)^{18}$
VH: $x_1 = 2^{18}(\cos 18 \cdot \frac{5}{6}\pi + i \sin \pi) = 2^{18}(-1 + 0i) = -2^{18}$

11) Vypočtěte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:
$(1 + i)^{10}$
Sb-MM: $32i$ …str.141/3.3-a)

7. Binomické rovnice

1) Vypočtěte:
$x^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$
G: $x_k = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right);\ k = 0,1,2,3$