

Rovnice v množině komplexních čísel (4)

1. Základní pojmy

Základní vlastnost imaginární jednotky odmocníme jako rovnici:

$$i^2 = -1 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Dostáváme informaci, že existuje odmocnina ze záporného čísla, která je imaginární část komplexního čísla s komplexní jednotkou. Uveďme příklady:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3 \cdot i \quad \text{nebo} \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5} \cdot i$$

V množině komplexních čísel pro kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ platí:

$$\begin{aligned} D > 0 &\rightarrow \text{rovnice má dva reálné různé kořeny,} \\ D = 0 &\rightarrow \text{rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen,} \\ D < 0 &\rightarrow \text{rovnice má dva komplexně sdružené kořeny.} \end{aligned}$$

2. Kvadratická rovnice v C

1) Řešte v C:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } -2 \pm i \dots \text{str.142/4.4-a)}$$

2) Řešte v C:

$$4x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } 1 \pm \frac{1}{2}i \dots \text{str.142/4.4-b)}$$

3) Řešte v C:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } -1 \pm \sqrt{3}i \dots \text{str.142/4.4-c)}$$

4) Řešte v C:

$$2x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\text{Sb-MM: } -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i \dots \text{str.142/4.4-d)}$$

5) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$3x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$$

6) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$2x^2 - 9x + 17 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{55}i}{4}$$

7) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$3x^2 + 8x + 11 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{17}i}{3}$$

8) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$3x^2 - 12x + 13 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

9) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$4x^2 - 16x + 17 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{4 \pm i}{2}$$

10) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 9 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \sqrt{2} \pm \frac{1}{2}i$$

11) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$9x^2 - 6x + 19 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{2}i}{3}$$

12) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$4x^2 - 12x + 17 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

13) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$5x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{5}$$

14) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$9x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$\text{Radl: } x_{1,2} = \frac{1 \pm 3i}{3}$$

3. Kubická rovnice v R

1) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 3$$

2) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 + 8x^2 + 15x = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 0; x_2 = -3; x_3 = -5$$

3) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 0; x_2 = -2; x_3 = 3$$

4) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 3$$

5) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 4; x_2 = -\sqrt{2}; x_3 = \sqrt{2}$$

6) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 2$$

7) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = 1$$

8) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = -1; x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}$$

4. Kubická rovnice v C

- 1) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 6x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 6; x_2 = -i; x_3 = i$$

- 2) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = 0$$

$$\text{Radl: } x_1 = 5; x_2 = -\sqrt{3}i; x_3 = \sqrt{3}i$$

- 3) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = -1; x_2 = -2i; x_3 = 2i$$

- 4) Řešte rovnici v oboru komplexních čísel:

$$2x^3 - x^2 + 18x - 9 = 0$$

$$\text{VH: } x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -3i; x_3 = 3i$$

5. Rovnice v C

- 1) Řešte v C rovnici:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x} = 1 + i$$

$$\text{G: } \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

- 2) Řešte v C rovnici:

$$(3-4i)^2 - 2x = x$$

$$\text{G: } -\frac{2}{3} + 24i$$

6. Určení kvadratické rovnice

- 1) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Radl: } x^2 - x + 1 = 0$$

- 2) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Radl: } x^2 - 5x + 7 = 0$$

- 3) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Radl: } x^2 - 3x + 3 = 0$$

- 4) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = -\frac{1}{2} - i$$

$$\text{Radl: } 4x^2 + 4x + 5 = 0$$

- 5) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Radl: } 2x^2 + 8x + 9 = 0$$

- 6) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Radl: } 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

- 7) Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejichž jeden kořen je komplexní číslo
- x_1
- :

$$x_1 = \frac{\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi}{2i}$$

$$\text{G: } x_1 = \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \Rightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

- 8) Zapište kvadratickou rovnici, jestliže znáte kořen:

$$x_1 = 3 - 6i$$

$$\text{Sb-MM: } x^2 - 6x + 45 = 0 \dots \text{str.142/4.5-a)}$$

7. Kvadratická rovnice s částečnou odmocninou

- 1) Řešte v R rovnici:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{VH: D=12 } x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

- 2) Řešte v R rovnici:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\text{VH: D=8 } x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

- 3) Řešte v R rovnici:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\text{VH: D=12 } x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

- 4) Řešte v R rovnici:

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$

$$\text{VH: D=24 } x_1 = 4 + \sqrt{6}, x_2 = 4 - \sqrt{6}$$

- 5) Řešte v R rovnici:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{VH: D=8 } x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

- 6) Řešte v R rovnici:

$$3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\text{VH: D=52 } x_1 = \frac{2+\sqrt{13}}{3}, x_2 = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$$

- 7) Řešte v R rovnici:

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\text{VH: D=12 } x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

- 8) Řešte v R rovnici:

$$2x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\text{VH: D=60 } x_1 = \frac{3+\sqrt{15}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{15}}{2}$$