cermat

MATEMATIKA 9

M9PAD18C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Počet úloh: 16

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů

Povolené pomůcky: pouze psací a rýsovací potřeby

- Tento dokument obsahuje komentovaná řešení jednotlivých úloh didaktického testu.
- U každé úlohy je uveden jeden (příp. několik) z mnoha možných způsobů řešení.
- Do záznamového archu se zpravidla zapisují pouze výsledky úloh.
  U úloh **3**, **4** a **5** se vyžaduje také zápis postupu řešení.
- Na konci dokumentu je přiložen vzor vyplněného záznamového archu.

V úlohách **1**, **2**, **6**, **7**, **8** a **16** přepište do **záznamového archu** pouze **výsledky**.

1 bod

1 **Vypočtěte**, kolikrát je trojnásobek čísla 9 menší než číslo 324.

Řešení:

Trojnásobek čísla 9: $3 \cdot 9 = 27$

$324 : 27 = 12$

Trojnásobek čísla 9 je **12krát** menší než číslo 324.

Jiný způsob řešení:

$$\frac{324}{3 \cdot 9} = \frac{108}{9} = \mathbf{12}$$

---

max. 2 body

2 **Vypočtěte:**

2.1

$$\sqrt{1^2 - 0{,}6^2} =$$

Řešení:

$$\sqrt{1^2 - 0{,}6^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = \mathbf{0{,}8}$$

Jiný způsob řešení:

$$\sqrt{1^2 - 0{,}6^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

Další způsob řešení, a to užitím vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$**:**

$$\sqrt{1^2 - 0{,}6^2} = \sqrt{(1 + 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6)} = \sqrt{1{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{0{,}16 \cdot 4} = \sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{4} = 0{,}4 \cdot 2 = \mathbf{0{,}8}$$

2.2

$$100 - \frac{1}{0{,}01 \cdot 0{,}1} =$$

Řešení:

$$100 - \frac{1}{0{,}01 \cdot 0{,}1} = 100 - \frac{1}{0{,}001} = 100 - 1\,000 = \mathbf{-900}$$

Jiný způsob řešení:

$$100 - \frac{1}{0{,}01 \cdot 0{,}1} = \frac{100 \cdot 0{,}001 - 1}{0{,}001} = \frac{0{,}1 - 1}{0{,}001} = \frac{-0{,}9}{0{,}001} \cdot \frac{1\,000}{1\,000} = \frac{-900}{1} = \mathbf{-900}$$

Doporučení: Úlohy **3**, **4** a **5** řešte přímo **v záznamovém archu**.

max. 4 body

3 Vypočtěte a výsledek zapište zlomkem v základním tvaru.

3.1

$$\frac{\frac{4}{1+2}-1}{1+2}=$$

Řešení:

$$\frac{\frac{4}{1+2}-1}{1+2}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

Jiný způsob řešení:

$$\frac{\frac{4}{1+2}-1}{1+2}=\frac{\frac{4}{3}-1}{3}=\left(\frac{4}{3}-1\right):3=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{4-3}{9}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

3.2

$$\left(2-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{8}{9}:\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{6}\right)=$$

Řešení:

$$\left(2-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{8}{9}:\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{6}\right)=\frac{16-7}{8}\cdot\frac{8}{9}:\frac{15+20}{24}=1:\frac{35}{24}=\mathbf{\frac{24}{35}}$$

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

---

max. 4 body

4 Zjednodušte (výsledný výraz nesmí obsahovat závorky)**:**

4.1

$$(3+a)^2-(3\cdot a)^2-3^2=$$

Řešení:

$$(3+a)^2-(3\cdot a)^2-3^2=9+6a+a^2-9a^2-9=\boldsymbol{-8a^2+6a}$$

4.2

$$2n\cdot(3-n)+2\cdot(3n\cdot n)-n\cdot(3\cdot n)=$$

Řešení:

$$2n\cdot(3-n)+2\cdot(3n\cdot n)-n\cdot(3\cdot n)=6n-2n^2+6n^2-3n^2=\boldsymbol{n^2+6n}$$

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

max. 4 body

5 Řešte rovnici:

5.1

$$2 \cdot \frac{5x}{6} - \frac{1}{3} = x - \frac{1}{2}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{5x}{6} - \frac{1}{3} &= x - \frac{1}{2} \\
\frac{5x}{3} - \frac{1}{3} &= x - \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 6 \\
10x - 2 &= 6x - 3 \\
4x &= -1 \\
\boldsymbol{x} &= -\mathbf{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

5.2

$$y - \frac{1 - 3y}{2} = \frac{7}{4} + \frac{5y}{3}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
y - \frac{1 - 3y}{2} &= \frac{7}{4} + \frac{5y}{3} \quad \Big| \cdot 12 \\
12y - 6 \cdot (1 - 3y) &= 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5y \\
12y - 6 + 18y &= 21 + 20y \\
10y &= 27 \\
\boldsymbol{y} &= \mathbf{2{,}7}
\end{aligned}$$

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení** (zkoušku nezapisujte).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Čtenáři si v knihovně během prvních tří dnů půjčili celkem 220 knih.

Druhý den si čtenáři půjčili o polovinu více knih než první den a zároveň o 20 knih méně než třetí den.

(*CZVV*)

max. 4 body

6 Neznámý počet knih, které si čtenáři půjčili v knihovně první den, označte x.

6.1 V závislosti na veličině x vyjádřete počet knih, které si čtenáři půjčili druhý den.

6.2 V závislosti na veličině x vyjádřete počet knih, které si čtenáři půjčili třetí den.

6.3 Vypočtěte, kolik knih si čtenáři půjčili první den.

Řešení:

x … neznámý počet knih, které si čtenáři půjčili v knihovně první den

6.1 Druhý den si čtenáři půjčili o polovinu více knih než první den:
$x + 0{,}5x = \mathbf{1{,}5x}$

6.2 Druhý den si čtenáři půjčili o 20 knih méně než třetí den, což znamená, že třetí den si čtenáři půjčili o 20 knih více než druhý den:
$\mathbf{1{,}5x + 20}$

6.3 Čtenáři si v knihovně během prvních tří dnů půjčili celkem 220 knih:

$$x + 1{,}5x + 1{,}5x + 20 = 220$$
$$4x = 200$$
$$\mathbf{x = 50}$$

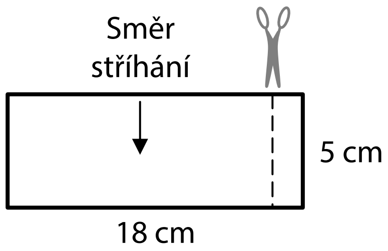
První den si čtenáři půjčili **50 knih**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Papírový obdélník s rozměry 18 cm × 5 cm se **beze zbytku** použije na zhotovení kvádru.

Obdélník se rozstříhá na jednotlivé stěny kvádru (tj. podstavy i boční stěny). Stříhat se smí jen v naznačeném směru – rovnoběžném s kratší stranou původního obdélníku.

Z nastříhaných stěn se složí kvádr tak, aby se papír nikde nepřekrýval, a po hranách se spojí lepicí páskou.



(*CZVV*)

max. 3 body

7 Vypočtěte

7.1 v cm^2 povrch složeného kvádru;

Řešení:

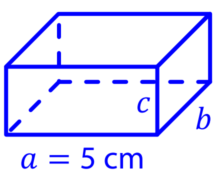
Povrch složeného kvádru je roven obsahu papírového obdélníku (použije se beze zbytku na zhotovení kvádru).

$S = 18\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{90\text{ cm}^2}$

7.2 v cm rozměry kvádru (existuje jediné možné řešení);

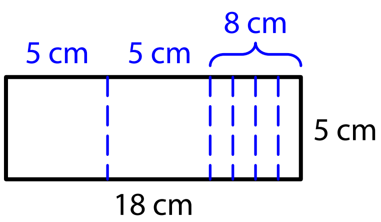
Řešení:

Protože se smí stříhat jen v naznačeném směru (rovnoběžném s kratší stranou původního obdélníku), bude mít každý ustřižený díl (každá stěna kvádru) alespoň jeden rozměr 5 cm.



Umístíme kvádr tak, aby bylo $a = 5$ cm. Potom musí být $b = 5$ cm nebo $c = 5$ cm, a některá stěna kvádru tedy musí být čtvercová.

Všechny stěny **nemohou** být čtvercové, neboť k sestrojení krychle (6 stěn) s délkou hrany 5 cm bychom museli mít papírový obdélník s rozměry 30 cm × 5 cm (zadaný obdélník je však kratší).



Dvě protější stěny kvádru jsou vždy shodné, proto z papírového obdélníku odstřihneme dva čtverce.

Zbývající 4 stěny musí být shodné, tedy zbytek papíru rozdělíme na 4 shodné díly.

Třetí rozměr kvádru: 8 cm : 4 = 2 cm

Rozměry kvádru: **5 cm, 5 cm, 2 cm**

7.3 v cm^3 objem složeného kvádru.

Řešení:

Rozměry kvádru jsou 5 cm, 5 cm a 2 cm (viz řešení úlohy 7.2).

$V = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = \mathbf{50\text{ cm}^3}$

max. 3 body

8

8.1 Vypočtěte v minutách devítinu úhlu o velikosti 7,5 stupně.

Řešení:

$7{,}5° = 7{,}5 \cdot 60' = 450'$

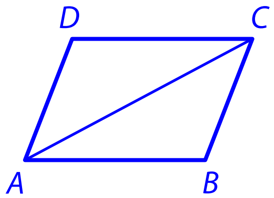
$450' : 9 = \mathbf{50'}$

Jiný způsob řešení:

$$\frac{7{,}5 \cdot 60'}{9} = \frac{7{,}5 \cdot 20'}{3} = \frac{2{,}5 \cdot 20'}{1} = \mathbf{50'}$$

8.2 Vypočtěte v cm^2 obsah trojúhelníku *ABC*, je-li obsah rovnoběžníku *ABCD* 1,5 dm^2.

Řešení:



Obsah trojúhelníku *ABC* je polovinou obsahu rovnoběžníku *ABCD*.

$$\frac{1{,}5\ \mathrm{dm}^2}{2} = \frac{150\ \mathrm{cm}^2}{2} = \mathbf{75\ cm^2}$$

8.3 Vypočtěte, kolikrát je objem 0,2 litru větší než objem 5 mililitrů.

Řešení:

Oba údaje porovnáme ve stejných jednotkách objemu, např. v mililitrech.

0,2 l = 200 ml

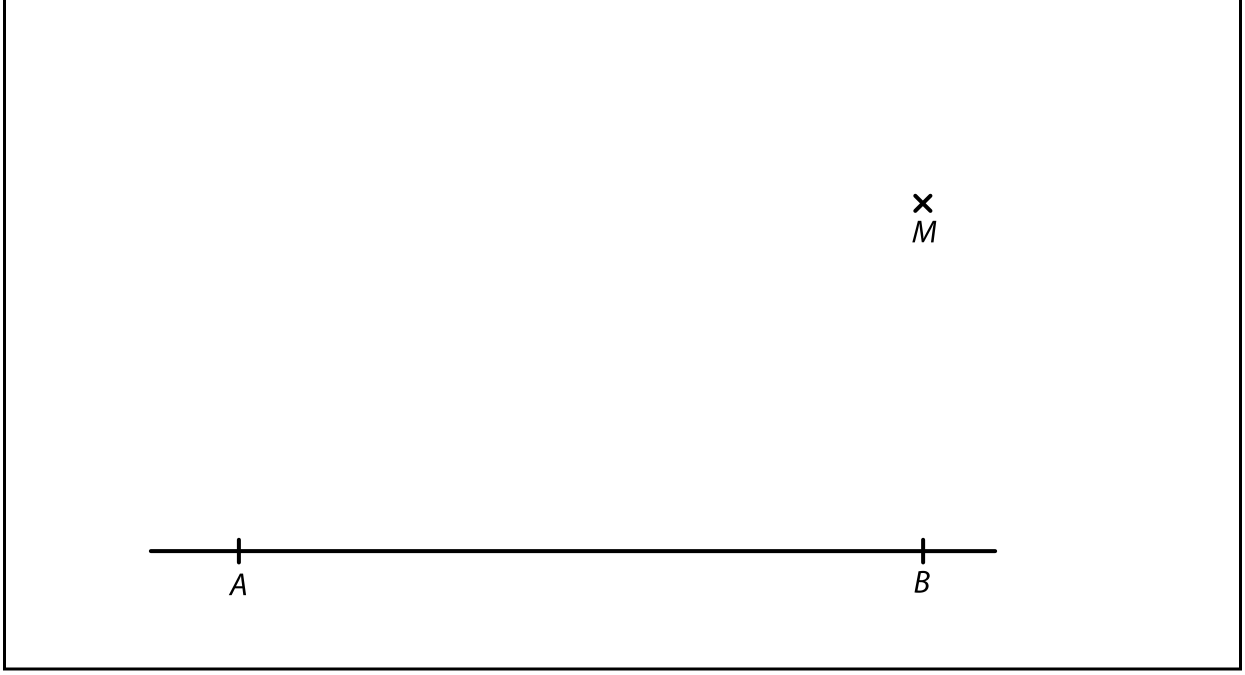
200 ml : 5 ml = **40**

40krát

Doporučení pro úlohy **9** a **10**: Rýsujte přímo **do záznamového archu**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

V rovině leží přímka *AB* a mimo ni bod *M*.



(*CZVV*)

max. 2 body

9 Úsečka *AB* je strana *c* trojúhelníku *ABC*. Bod *M* leží uvnitř tohoto trojúhelníku na těžnici t_c (těžnice na stranu *c*). Výška v_c (výška na stranu *c*) měří 6 cm.

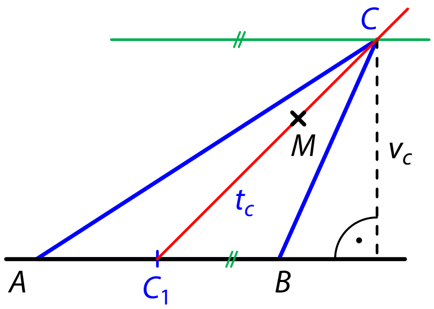
9.1 **Sestrojte** těžnici t_c, chybějící vrchol *C* trojúhelníku *ABC* a trojúhelník **narýsujte**.

9.2 **Sestrojte** těžiště trojúhelníku *ABC* a označte jej písmenem *T*.

V záznamovém archu obtáhněte celou konstrukci **propisovací tužkou** (čáry i písmena).

Řešení:

Nejprve sestrojíme náčrtek trojúhelníku *ABC* a vyznačíme v něm zadané údaje.
Jsou to přímka *AB* a bod *M* na těžnici t_c. Těžnice t_c je spojnice vrcholu *C* a středu C_1 strany *AB*.
Dále vyznačíme výšku v_c, tj. vzdálenost vrcholu *C* od přímky *AB*.

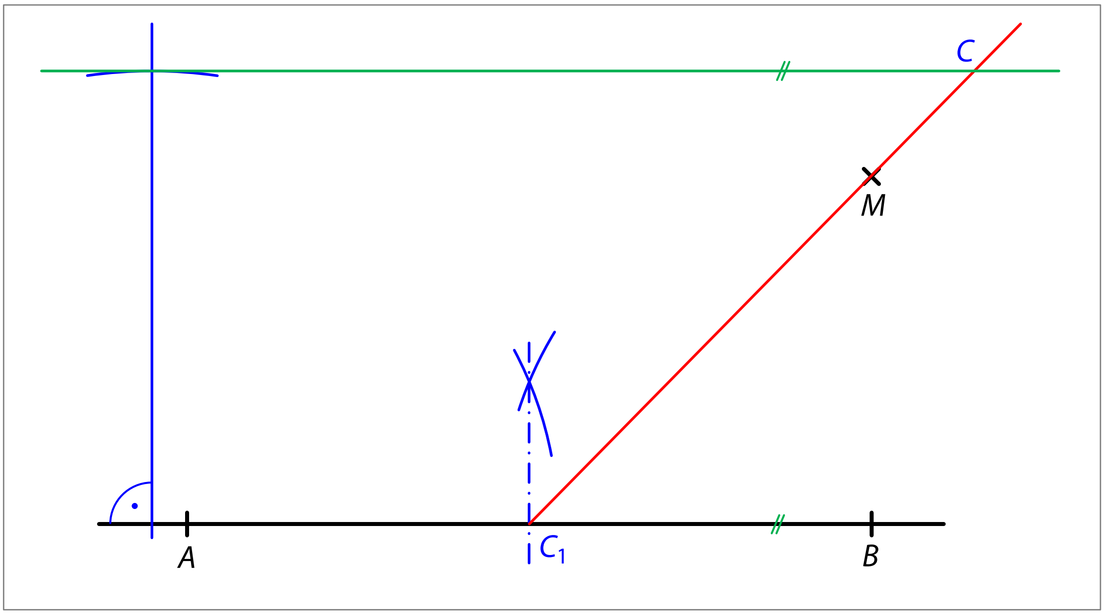


9.1 Vrchol *C* leží na polopřímce C_1M a na rovnoběžce s přímkou *AB* ve vzdálenosti v_c.

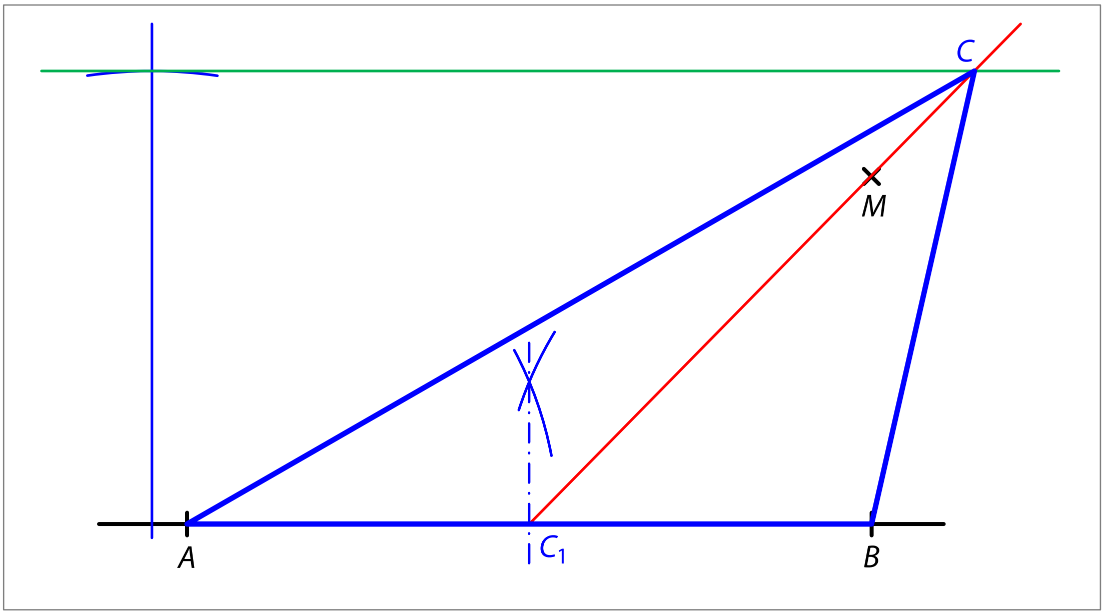
9.2 Těžiště *T* je průsečík těžnic (např. těžnic t_c a t_a).

Konstrukci trojúhelníku popíšeme v několika následujících krocích:

1. Sestrojíme střed C_1 úsečky AB.
2. Sestrojíme polopřímku C_1M.
3. Sestrojíme rovnoběžku s přímkou AB ve vzdálenosti $v_c = 6$ cm.
   (Konstrukci provedeme pouze v polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem M.)
4. Průsečík polopřímky C_1M se zelenou přímkou je vrchol C trojúhelníku ABC.



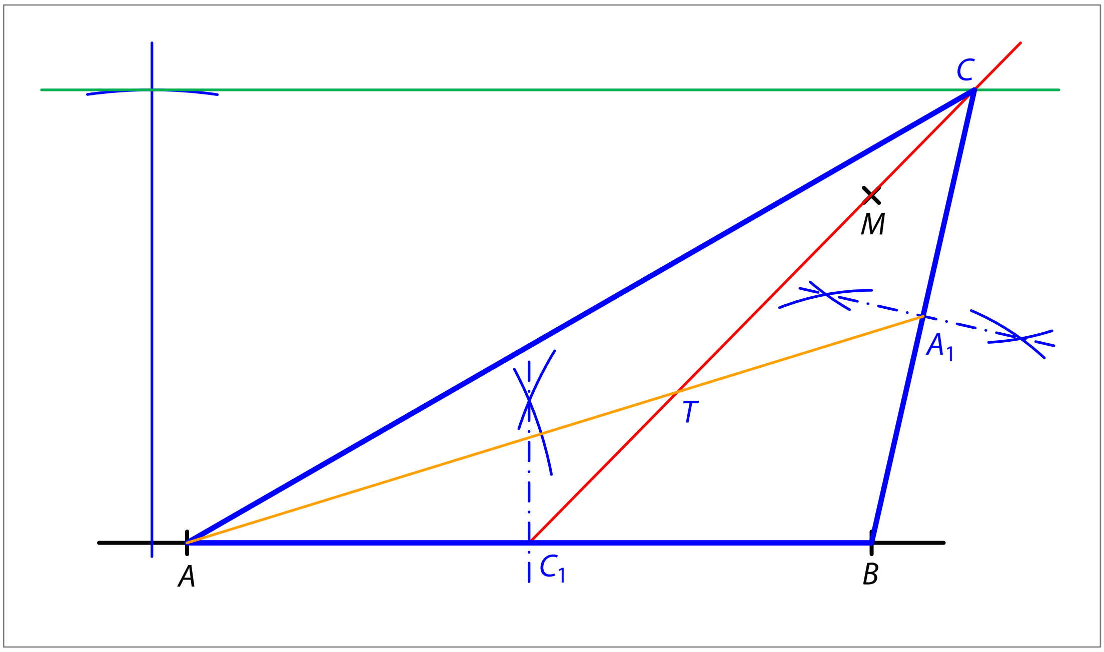
5. Sestrojíme a zvýrazníme trojúhelník ABC.



Závěr: Úloha 9.1 má 1 řešení.

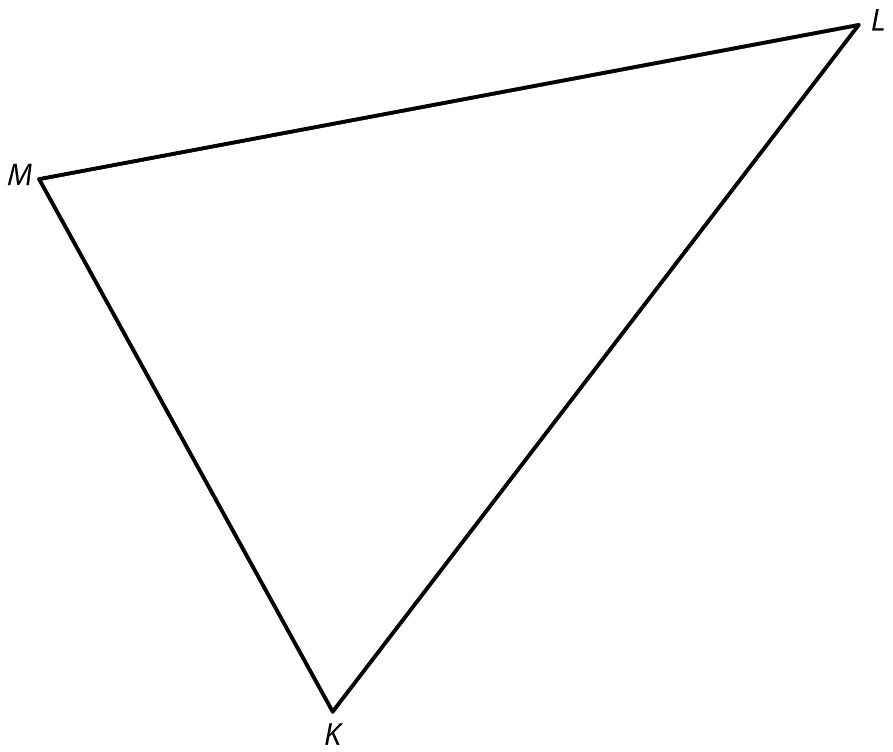
Pokračujeme řešením úlohy 9.2:

6. Sestrojíme střed A_1 úsečky BC.
7. Průsečík úsečky CC_1 (těžnice t_c) a úsečky AA_1 (těžnice t_a) je těžiště T trojúhelníku ABC.


C
M
A1
T
A
C1
B

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině leží trojúhelník *KLM*.



(*CZVV*)

max. 3 body

10 Kružnice *k* prochází vrcholy trojúhelníku *KLM*.

Sestrojte střed *S* kružnice *k*.

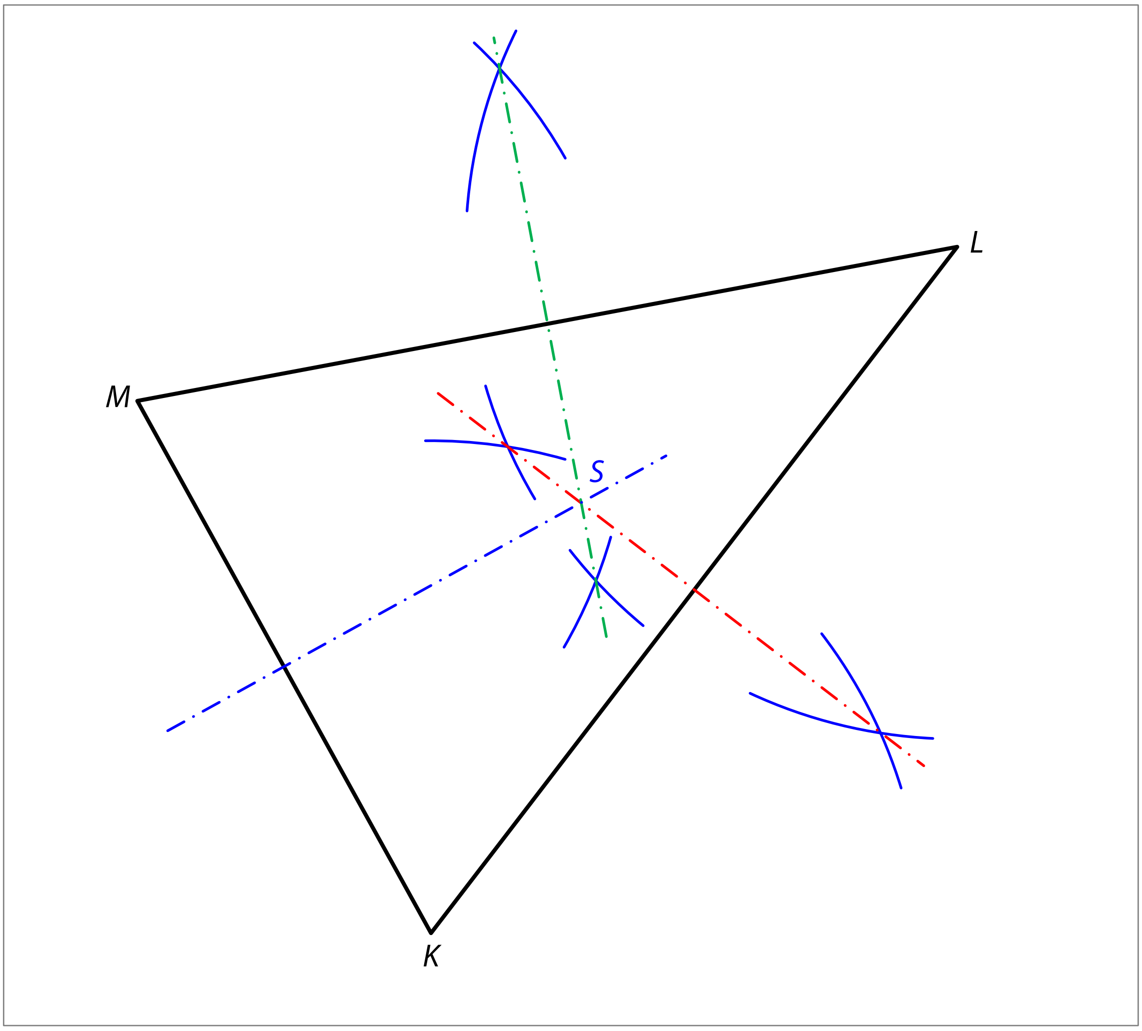
V záznamovém archu obtáhněte celou konstrukci **propisovací tužkou** (čáry i písmena).

Řešení:

Kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníku, je kružnice trojúhelníku opsaná. Její střed je stejně vzdálen od všech vrcholů trojúhelníku a leží na osách všech stran trojúhelníku, tj. v průsečíku těchto os.

Popis konstrukce:

1. Sestrojíme osu strany *KL*.
2. Sestrojíme osu strany *LM* (případně osu strany *KM*).
3. Průsečík červené a zelené osy je střed *S* kružnice *k*.


L
M
S
K

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Pro vnitřní úhly trojúhelníku *ABC* platí:

$\alpha : \beta = 5 : 3, \quad \alpha : \gamma = 1 : 2$

(CZVV)

max. 4 body

11 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (11.1–11.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
11.1 $\beta : \gamma = 5 : 6$	☐	☒
11.2 $\gamma - \beta = 70°$	☒	☐
11.3 $\gamma - \alpha = 50°$	☒	☐

Řešení:

$\alpha : \beta = 5 : 3, \quad \alpha : \gamma = 1 : 2$

Druhý poměr rozšíříme pěti, aby byl úhel α v obou případech vyjádřen stejným počtem dílů.

$\alpha : \beta = 5 : 3, \quad \alpha : \gamma = 5 : 10$

$\alpha : \beta : \gamma = 5 : 3 : 10$

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.
180° rozdělíme v poměru 5 : 3 : 10:
$180° : (5 + 3 + 10) = 180° : 18 = 10°$

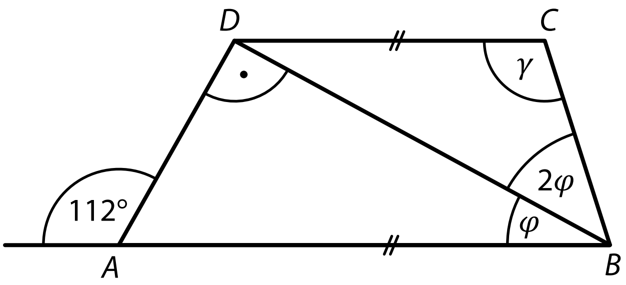
$\alpha = 5 \cdot 10° = 50°$
$\beta = 3 \cdot 10° = 30°$
$\gamma = 10 \cdot 10° = 100°$

11.1 $\beta : \gamma = 3 : 10$
Tvrzení 11.1 je **nepravdivé**.

11.2 $\gamma - \beta = 100° - 30° = 70°$
Tvrzení 11.2 je **pravdivé**.

11.3 $\gamma - \beta = 100° - 50° = 50°$
Tvrzení 11.3 je **pravdivé**.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 12



(CZVV)

2 body

12 **Jaká je velikost úhlu γ?**

Úhly neměřte, ale vypočtěte.

A) 114°

B) 117°

C) 120°

D) 126°

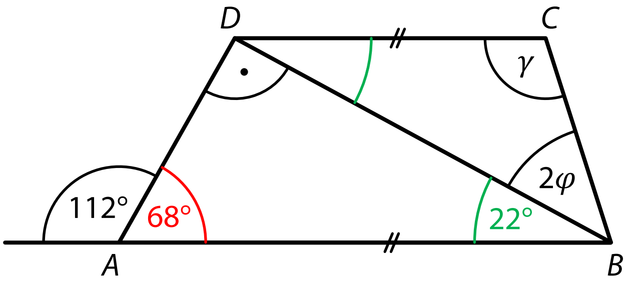
E) jiná velikost

Řešení:

Vedlejší úhel k úhlu o velikosti 112°
má velikost: $180° - 112° = 68°$

V pravoúhlém trojúhelníku *ABD* platí:
$\varphi = 90° - 68° = 22°$

Přímky *AB* a *CD* jsou rovnoběžné, proto zeleně vyznačené střídavé úhly mají stejnou velikost, a to 22°.



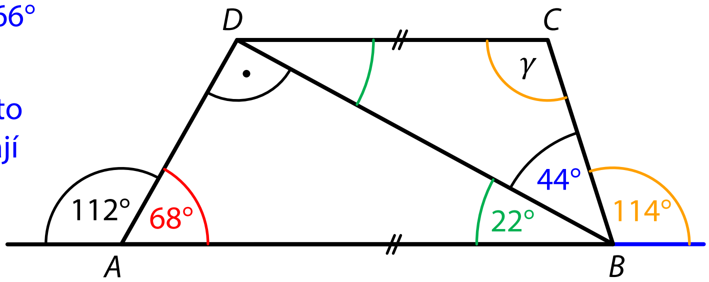
Vnitřní úhly trojúhelníku *BCD* mají velikosti $\varphi = 22°$, $2\varphi = 44°$ a γ.
Platí: $\gamma = 180° - (22° + 44°) = \mathbf{114°}$

případně

Vedlejší úhel k úhlu o velikosti $3\varphi = 66°$
má velikost: $180° - 66° = 114°$

Přímky *AB* a *CD* jsou rovnoběžné, proto oranžově vyznačené střídavé úhly mají stejnou velikost, a to 114°.

$\gamma = \mathbf{114°}$



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Traktor najel na přímé silnici zadním kolem na tubu s červenou barvou. Tuba se zaklínila do pneumatiky a praskla. Traktor pak na silnici vytvořil každých 252 cm maličkou červenou skrvnu.

(CZVV)

2 body

13 V jaké výšce nad zemí je střed zadního kola traktoru?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

A) menší než 35 cm

B) 35 cm

C) 40 cm

D) 44 cm

E) větší než 44 cm

Řešení:

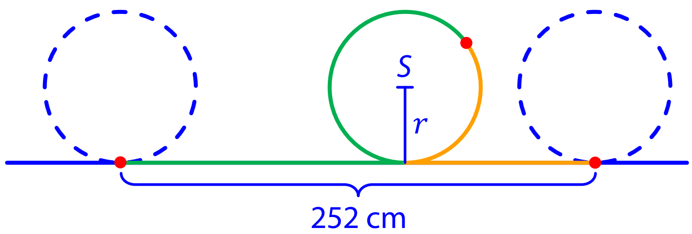
Vzdálenost mezi nejbližšími dvěma skvrnami (252 cm) je stejná jako obvod kola.

$o = 2\pi r$

$r = \frac{o}{2\pi}$

$r \doteq \frac{252 \text{ cm}}{6{,}28}$

$\boldsymbol{r \doteq 40}$ **cm**

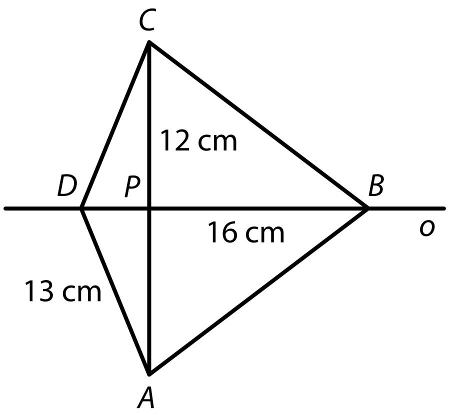


Střed zadního kola traktoru je přibližně **40 cm** nad zemí.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Čtyřúhelník *ABCD* je osově souměrný podle osy *o*. Úhlopříčky *AC* a *BD* se protínají v bodě *P*.

Platí: $|CP| = 12$ cm; $|BP| = 16$ cm; $|AD| = 13$ cm.



(CZVV)

2 body

14 Jaký je obsah čtyřúhelníku *ABCD*?

A) 244 cm^2

B) 252 cm^2

C) 258 cm^2

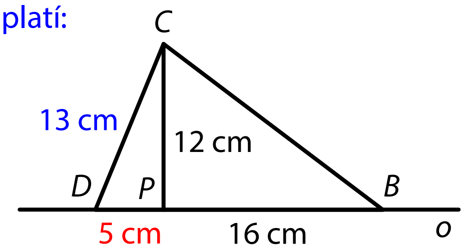
D) 288 cm^2

E) jiný obsah

Řešení:

Čtyřúhelník *ABCD* je osově souměrný podle osy *o*, proto platí:
$|AP| = |CP| = 12$ cm; $|CD| = |AD| = 13$ cm;
$|\sphericalangle CPD| = 90°$

V pravoúhlém trojúhelník *CDP* má odvěsna *CP* délku 12 cm a přepona 13 cm.



Pro délku odvěsny *DP* platí:

$|DP| = \sqrt{13^2 - 12^2}$ cm $= \sqrt{169 - 144}$ cm $= \sqrt{25}$ cm $= 5$ cm

Čtyřúhelník *ABCD* se skládá ze dvou shodných trojúhelníků (*ABD* a *BCD*), v nichž známe délku jedné strany a velikost výšky k této straně.

Obsah čtyřúhelníku *ABCD*:

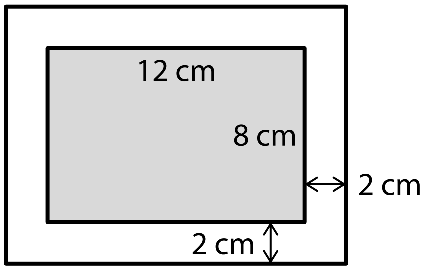
$$S = 2 \cdot \frac{(5\text{ cm} + 16\text{ cm}) \cdot 12\text{ cm}}{2} = 21\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = \mathbf{252\ cm^2}$$

max. 6 bodů

15 Přiřaďte ke každé úloze (15.1–15.3) odpovídající výsledek (A–F).

15.1 Obrázek tvaru obdélníku s rozměry 12 cm a 8 cm je nalepen na obdélníkové podložce. Podložka přesahuje obrázek nahoře, dole, vpravo i vlevo o 2 cm.

Kolik procent plochy podložky není zakryto obrázkem? E



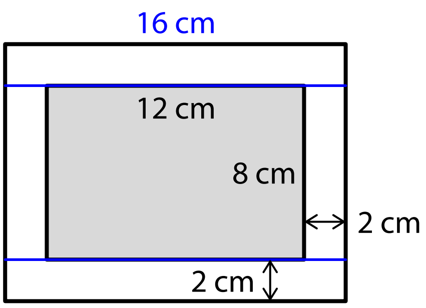
Řešení:

Obsah plochy zakryté obrázkem: $12\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^2$

Obsah obdélníkové podložky: $(12 + 4)\text{ cm} \cdot (8 + 4)\text{ cm} = 16\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 192\text{ cm}^2$

96 cm^2 je polovina ze 192 cm^2,
tedy 50 % plochy podložky je zakryto obrázkem a **50 %** není zakryto obrázkem.

Jiný způsob řešení:

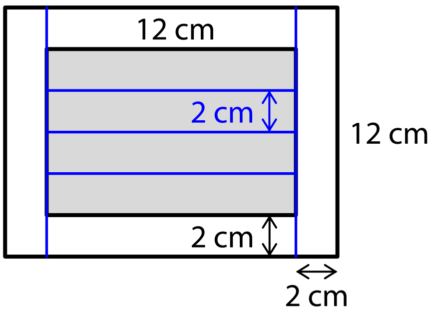


Obsah nezakryté části podložky (bílých okrajů):
$2 \cdot (16\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} + 8\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}) = 96\text{ cm}^2$

Obsah podložky: $16\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 192\text{ cm}^2$

$\dfrac{96\text{ cm}^2}{192\text{ cm}^2} \cdot 100\ \% = \mathbf{50\ \%}$

Grafické řešení:



Obrázek lze stejně jako nezakryté bílé okraje rozdělit na 4 obdélníky s rozměry 12 cm a 2 cm.

Zakrytá a nezakrytá část jsou stejně velké.
Nezakrytá část tvoří **50 %** celé plochy podložky.

15.2 V lednu se 2 litry limonády prodávaly za 24 Kč, v únoru se za tuto cenu prodávalo 2,5 litru limonády.

O kolik procent byl 1 litr limonády v únoru levnější než v lednu? B

Řešení:

Cena v lednu 2 litry ... 24 Kč
Cena v únoru 2,5 litru ... 24 Kč

0,5 litru: Cena v lednu 6 Kč ... 100 %
Cena v únoru 4,80 Kč ... x %

$$x = \frac{4{,}8}{6} \cdot 100\,\% = 80\,\%$$

$$100\,\% - 80\,\% = \mathbf{20\,\%}$$

případně

0,5 litru limonády:

Cena v lednu 6 Kč ... 100 %
Snížení ceny v únoru 6 Kč − 4,80 Kč = 1,20 Kč ... s %

$$s = \frac{1{,}2}{6} \cdot 100\,\% = \mathbf{20\,\%}$$

Jiný způsob řešení:

Cena v lednu 2 litry ... 24 Kč
Cena v únoru 2,5 litru ... 24 Kč

2,5 litru: Cena v lednu 30 Kč ... 100 %
Sleva v únoru 6 Kč ... **20 %**

15.3 Cyklista ujel za 3 dny trasu dlouhou 240 km. První den ujel polovinu celé trasy, druhý den ujel dvě pětiny zbytku trasy.

Kolik procent celé trasy ujel cyklista třetí den? D

Řešení:

První den 120 km $(240 : 2 = 120)$

Druhý den 48 km $\left(\frac{2}{5} \cdot 120 = 48\right)$

Třetí den 72 km $(120 - 48 = 72)$

$$\frac{72}{240} \cdot 100\,\% = \frac{9}{30} \cdot 100\,\% = \frac{3}{10} \cdot 100\,\% = \mathbf{30\,\%}$$

Jiný způsob řešení:

První den $\frac{1}{2}$ trasy

Druhý den $\frac{1}{5}$ trasy $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\right)$

Třetí den $\frac{3}{10}$ trasy $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{10-5-2}{10} = \frac{3}{10}\right)$

Třetí den ujel cyklista $\frac{3}{10}$ trasy, což je **30 %** trasy.

Další způsob řešení:

$$\underbrace{\text{1. den}}_{50\,\%}\;\underbrace{\text{2. den}}_{20\,\%}\;\underbrace{\text{3. den}}_{\mathbf{30\,\%}\ (50\,\% - 20\,\% = 30\,\%)}$$

$$\left(\frac{2}{5}\cdot 50\,\% = 20\,\%\right)$$

Třetí den ujel cyklista **30 %** trasy.

A) (o) méně než 20 %

B) (o) 20 %

C) (o) 25 %

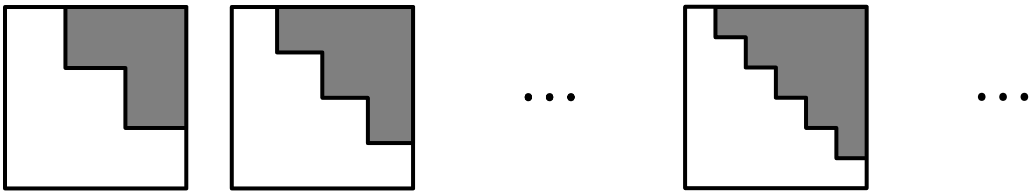
D) (o) 30 %

E) (o) 50 %

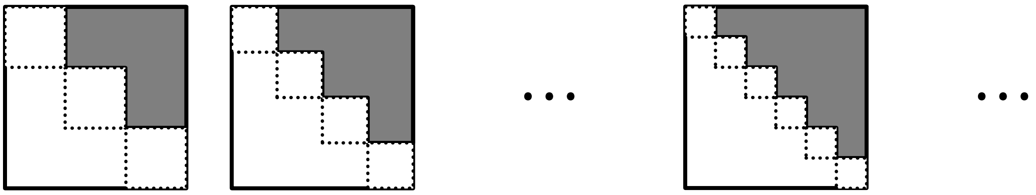
F) (o) více než 50 %

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Shodné čtverce jsou podle jednotného pravidla rozděleny vždy na světlou a tmavou plochu.



Obě plochy se liší o 3, 4 nebo více čtverečků, které lze vyznačit po úhlopříčce.



Poměr velikostí světlé a tmavé plochy u prvního zobrazeného čtverce je 6 : 3 a v základním tvaru jej zapisujeme 2 : 1.

(*CZVV*)

max. 4 body

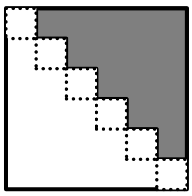
16

16.1 Zapište v základním tvaru poměr velikostí světlé a tmavé plochy čtverce, jestliže se obě plochy liší o 9 čtverečků vyznačených po úhlopříčce.

16.2 Zapište v základním tvaru poměr velikostí světlé a tmavé plochy čtverce, jestliže se obě plochy liší o 100 čtverečků vyznačených po úhlopříčce.

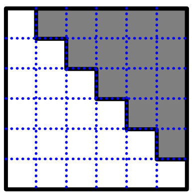
16.3 Určete počet čtverečků vyznačených po úhlopříčce, jestliže je poměr velikostí světlé a tmavé plochy 13 : 11.

Řešení:



6 čtverečků po úhlopříčce

6 řad



6 čtverečků v každé řadě

Celý čtverec rozdělíme na takové čtverečky, které jsou vyznačeny po úhlopříčce.

Počet čtverečků po úhlopříčce je stejný jako počet všech řad ve čtverci a rovněž je stejný jako počet čtverečků v každé řadě.

16.1 Obě plochy se liší o 9 čtverečků, tedy čtverec má 9 řad po 9 čtverečcích a skládá se celkem z 81 čtverečků ($9 \cdot 9 = 81$), mezi nimiž je tmavých o 9 méně než světlých.

$(81 - 9) : 2 = 72 : 2 = 36$
Tmavých čtverečků je 36 a světlých 45 ($36 + 9 = 45$).

Poměr velikostí světlé a tmavé plochy čtverce: 45 : 36 = **5** : **4**

16.2 Obě plochy se liší o 100 čtverečků, tedy čtverec má 100 řad po 100 čtverečcích a skládá se celkem z 10 000 čtverečků ($100 \cdot 100 = 10\,000$), mezi nimiž je tmavých o 100 méně než světlých.

$(10\,000 - 100) : 2 = 9\,900 : 2 = 4\,950$
Tmavých čtverečků je 4 950 a světlých 5 050 ($4\,950 + 100 = 5\,050$).

Poměr velikostí světlé a tmavé plochy čtverce: $5\,050 : 4\,950 = \mathbf{101 : 99}$

16.3 Poměr počtu světlých a tmavých čtverců je vyjádřen v základním tvaru 13 : 11. Když tento poměr vhodně rozšíříme, rozdíl obou čísel bude udávat počet čtverečků po úhlopříčce. Naopak součet těchto čísel bude udávat počet všech čtverečků ve čtverci, což musí být druhá mocnina počtu čtverečků po úhlopříčce.

Poměr postupně rozšiřujeme	Rozdíl obou čísel v poměru	Druhá mocnina rozdílu	Součet obou čísel v poměru
13 : 11	$13 - 11 = 2$	$2^2 = 4$	$13 + 11 = 24$
26 : 22	$26 - 22 = 4$	$4^2 = 16$	$26 + 22 = 48$
39 : 33	$39 - 33 = 6$	$6^2 = 36$	$39 + 33 = 72$
52 : 44	$52 - 44 = 8$	$8^2 = 64$	$52 + 44 = 96$
65 : 55	$65 - 55 = 10$	$10^2 = 100$	$65 + 55 = 120$
78 : 66	$78 - 66 = \mathbf{12}$	$12^2 = 144$	$78 + 66 = 144$
91 : 77	$91 - 77 = 14$	$14^2 = 196$	$91 + 77 = 168$
…			
(Rozšíříme-li poměr číslem jiným než 6, rovnost hodnot ve třetím a čtvrtém sloupci tabulky nenastane.)			

Jestliže je poměr velikostí světlé a tmavé plochy 13 : 11, čtverec je možné rozdělit na 144 shodných čtverečků, a po úhlopříčce bude vyznačeno **12 čtverečků**.

Jiný způsob řešení úlohy 16.3 (pro pokročilejší počtáře)**:**

Počet čtverečků				Poměr počtu světlých ku počtu tmavých čtverečků	
po úhlopříčce	ve čtverci	světlých	tmavých		
4	16	10	6	10 : 6	5 : 3
5	25	15	10	15 : 10	3 : 2 = 6 : 4
6	36	21	15	21 : 15	7 : 5
7	49	28	21	28 : 21	4 : 3 = 8 : 6
8	64	36	28	36 : 28	9 : 7
…					
12	←				13 : 11
12	144	78	66	78 : 66	13 : 11

Označíme počet čtverečků po úhlopříčce n (n je kladné celé číslo).

n	n^2	$\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$	$\frac{1}{2}n \cdot (n-1)$		$(n+1) : (n-1)$

Počet čtverečků v celém čtverci: $n \cdot n = n^2$

Počet všech čtverečků, které neleží po úhlopříčce, rozdělíme na polovinu a získáme počet tmavých čtverečků:

$$(n^2 - n) : 2 = n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n \cdot (n-1)$$

Počet tmavých čtverečků zvětšíme o počet čtverečků po úhlopříčce a získáme počet světlých čtverečků:

$$\frac{1}{2}n \cdot (n-1) + n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$$

Poměr počtu světlých ku počtu tmavých čtverečků:

$$\left[\frac{1}{2}n \cdot (n+1)\right] : \left[\frac{1}{2}n \cdot (n-1)\right] = (n+1) : (n-1)$$

Je-li $(n+1) : (n-1)$ rovno 13 : 11, pak $\boldsymbol{n} = \mathbf{12}$.

Konal(a) zkoušku ☐ Vyloučen(a) ☐ Nepřítomen(na) či nedokončil(a) ☐

MATEMATIKA 9A

List 1 ze 2

Jméno a příjmení: EMIL RYCHLÝ

DIDAKTICKÝ TEST – STRANA 1–4

1

12 král

2

2.1 0,8

2.2 −900

3 Uveďte postup řešení.

3.1

$$\frac{\frac{4}{1+2}-1}{1+2} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

3.2

$$\left(2-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{8}{9}:\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{6}\right) = \frac{16-7}{8}\cdot\frac{8}{9}:\frac{15+20}{24} =$$

$$= \frac{9}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{35} = \underline{\underline{\frac{24}{35}}}$$

4 Uveďte postup řešení.

4.1

$$(3+a)^2-(3\cdot a)^2-3^2 = 9+6a+a^2-9a^2-9 =$$

$$= \underline{\underline{-8a^2+6a}}$$

4.2

$$2n\cdot(3-n)+2\cdot(3n\cdot n)-n\cdot(3\cdot n) =$$

$$= 6n-2n^2+6n^2-3n^2 = \underline{\underline{n^2+6n}}$$

5 Uveďte postup řešení.

5.1

$$2 \cdot \frac{5x}{6} - \frac{1}{3} = x - \frac{1}{2} \quad / \cdot 6$$

$$10x - 2 = 6x - 3$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

5.2

$$y - \frac{1-3y}{2} = \frac{7}{4} + \frac{5y}{3} \quad / \cdot 12$$

$$12y - 6 \cdot (1-3y) = 21 + 20y$$

$$-8y - 6 + 18y = 21$$

$$10y = 27$$

$$y = \frac{27}{10}$$

6

6.1 $\frac{3}{2}x$

6.2 $\frac{3}{2}x + 20$

6.3 50 knih

7

7.1 $90\ cm^2$

7.2 5 cm, 5 cm, 2 cm

7.3 $50\ cm^3$

8

8.1 50'

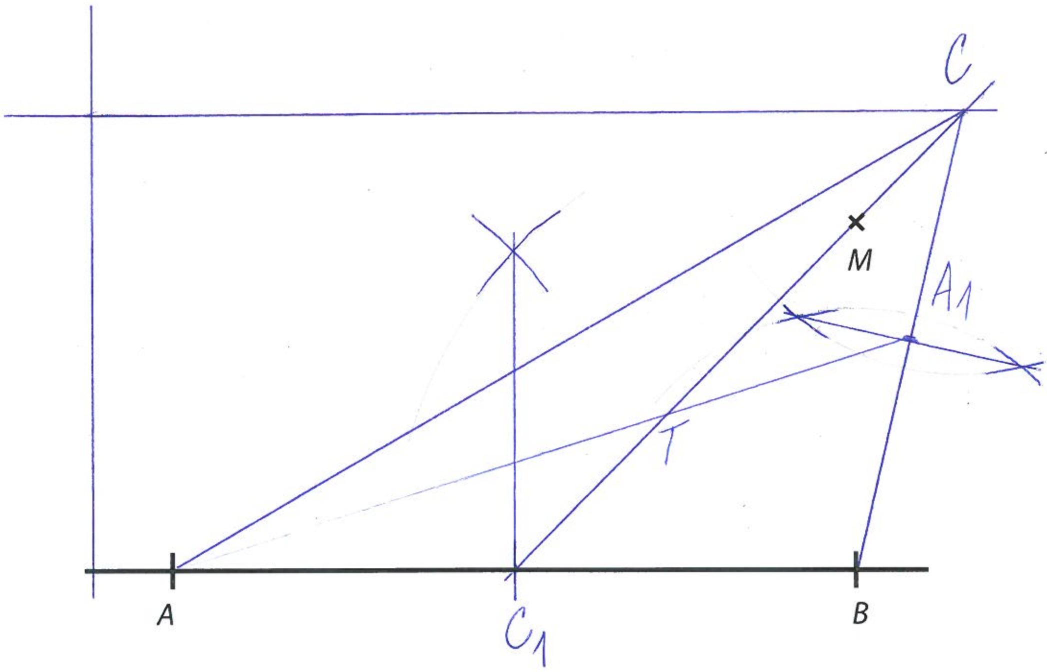
8.2 $75\ cm^2$

8.3 40krát

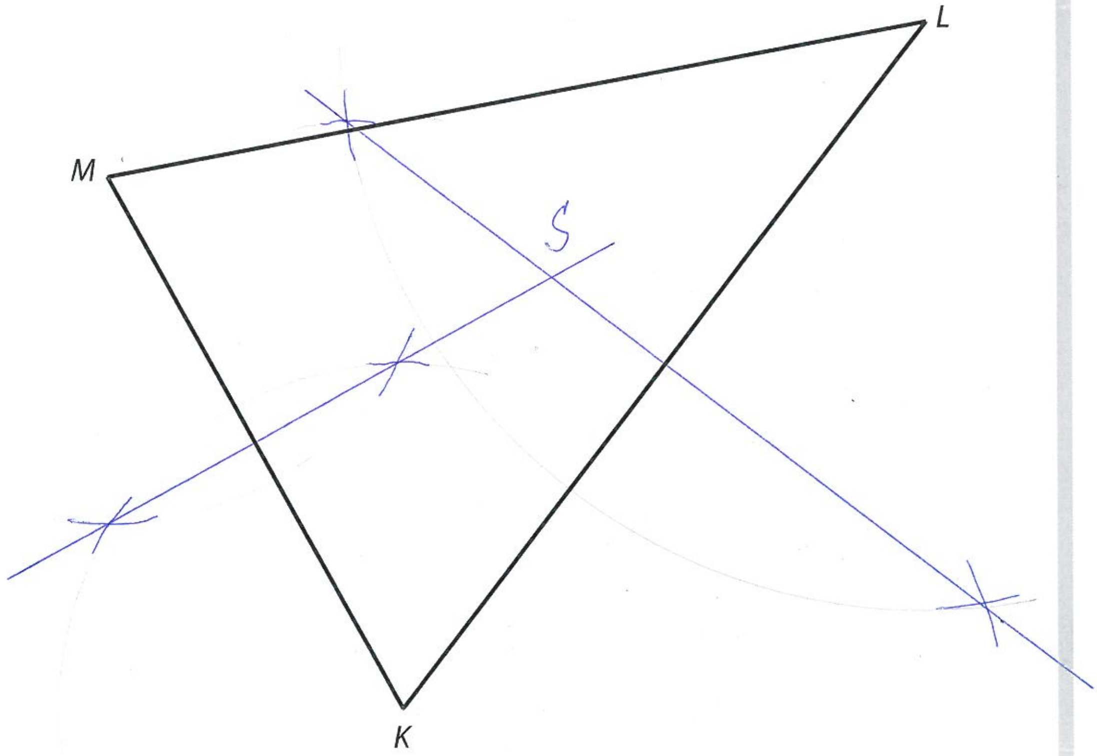
MATEMATIKA 9A

9 Obtáhněte vše propisovací tužkou.

9.1–9.2



10 Obtáhněte vše propisovací tužkou.



11	A	N
11.1		X
11.2	X	
11.3	X	

	A	B	C	D	E
12	X				
13			X		
14		X			

15	A	B	C	D	E	F
15.1					X	
15.2		X				
15.3				X		

16	16.1	16.2	16.3
	5 : 4	101 : 99	12 čtverečků